Applikative Theorien und Frege-Strukturen

Inauguraldissertation
der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bern

vorgelegt von

Reinhard Kahle

Institut für Informatik und angewandte Mathematik

1996

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Applikative Theorien bilden das erststufige Fundament der Systeme expliziter Mathematik, die in den 70er Jahren von Feferman eingeführt wurden. In dieser Arbeit stehen Fragen zur *syntaktischen Ausdrucksstärke* applikativer Theorien im Vordergrund. Im ersten Kapitel untersuchen wir diese im Rahmen der Grundtheorie BON und deren Erweiterungen um Quantifikationsoperatoren, im zweiten stellen wir *Frege-Strukturen* als eine elegante Möglichkeit vor, applikative Theorien auf der Basis eines *partiellen Wahrheitsprädikats* zu erweitern, um beweistheoretisch interessante Theorien mit hoher syntaktischer Ausdrucksstärke zu gewinnen.

Feferman hat in [Fef75, Fef79] Systeme expliziter Mathematik zur Formalisierung konstruktiver Mathematik im Stile von Bishop eingeführt. Diese Theorien sind von hohem beweistheoretischen Interesse, vor allem für die Analyse von Teilsystemen der Analysis und Theorien der Kripke-Platek-Mengenlehre. In den letzten Jahren hat sich aber auch der erststufige Teil dieser Theorien zu einem äußerst fruchtbaren Teilgebiet der mathematischen Beweistheorie entwickelt. Dabei wird die Theorie BON zugrundegelegt, in der die partielle kombinatorische Logik axiomatisch um Paarbildung und natürliche Zahlen erweitert wird. Die grundlagentheoretische Bedeutung dieser Theorien wird in den Monographien [Bee85] von Beeson und [TvD88b] von Troelstra und van Dalen dargestellt. Die beweistheoretische Analyse von BON mit unterschiedlichen Formen von Induktion und verschiedenen, der Rekursionstheorie entlehnten Quantifikationsoperatoren, ist von Feferman, Jäger und Strahm in [FJ93, JS96, Str96a, JKS9x] durchgeführt worden.

Im ersten Teil dieser Arbeit diskutieren wir nach der Definition der Theorie BON ausführlich eine gewisse Ausdrucksschwäche der bisherigen Formulierung: Die in BON axiomatisch eingeführten natürlichen Zahlen N und ihre Operationen erlauben im allgemeinen nicht, sogenannte N-*strikte* Funktionen zu definieren. Beispielsweise läßt sich keine Nachfolgeroperation $\widetilde{\mathsf{s}_\mathsf{N}}$ einführen, so daß man von $\mathsf{N}(\widetilde{\mathsf{s}_\mathsf{N}}\, t)$ auf $\mathsf{N}(t)$ schließen könnte. Dieses Problem ist bei der Untersuchung der logischen Zusammenhänge zwischen schwachen Induktionsformen von Bedeutung. Wir beheben diese Ausdrucksschwäche durch die Einführung einer N-strikten Fallunterscheidung.

Ähnliche Fragestellungen ergeben sich auch bei der Untersuchung der rekursionstheoretischen Quantifikationsoperatoren in applikativen Theorien. Wir betrachten dabei die drei rekursionstheoretisch äquivalenten Operatoren μ, E bzw. $\mathsf{E}^\#$ und studieren eingehend ihre syntaktische Ausdrucksstärke im applikativen Rahmen.

Im zweiten Kapitel der Arbeit führen wir Frege-Strukturen ein und behandeln deren Erweiterung um *Universen*. Frege-Strukturen wurden von Aczel in [Acz80] als Rekonstruktion des Mengenbegriffs in Freges Grundgesetzen der Arithmetik [Fre1893, Fre03] eingeführt. Aufbauend auf früheren Arbeiten von Scott [Sco75] definiert Aczel dabei Mengen als „Extensionen“ sogenannter propositionaler Funktionen, das sind Funktionen, welche Wahrheitswerte als Werte liefern. In diesem Ansatz wird die Russell-Antinomie nicht wie sonst üblich durch Einschränkung der Komprehension vermieden, sondern dadurch, daß man ein *partielles* Wahrheitsprädikat zugrundelegt. Neben der historisch-philosophischen Motivation hat Aczel dieses Konzept für Fragestellungen zu Martin-Löfs Typentheorie entwickelt (vgl. [Smi84]).

Zu diesem semantischen Konzept gab Beeson [Bee85, Kap. XVII] eine Formalisierung der Frege-Strukturen als eine Wahrheitstheorie über applikativen Theorien an. In der Literatur finden sich eine ganze Reihe von leicht unterschiedlichen Definitionen für Frege-Strukturen (s. [FM87a, FM87b, Tur90, Can93, HK95]). Wir folgen in dieser Arbeit weitestgehend Cantini, der eine umfangreiche beweistheoretische Behandlung von Frege-Strukturen in seinem Buch *Logical Frameworks for Truth and Abstraction* [Can96] vorgelegt hat.

Frege-Strukturen erlauben eine sehr elegante, erststufige Einführung eines Typenkonzepts in applikative Theorien und bieten sich daher als Alternative zu den Theorien von Typen und Namen an, in denen Jäger Typenstrukturen mit Hilfe eines Namensprädikats über BON einführt [Jäg88]. Ein wesentlicher Vorteil gegenüber diesen Theorien ist die Möglichkeit einer direkten Einbettung von Fixpunkttheorien in Frege-Strukturen. Andererseits lassen sich die Frege-Strukturen in einfacher Form aufgrund von Striktheitsproblemen nur über der totalen Variante von BON formulieren, d.h. auf der Grundlage einer totalen Applikationsrelation. Nach der Darstellung der Frege-Strukturen diskutieren wir diese Problematik eingehend und stellen zwei Ansätze für Frege-Strukturen im partiellen Kontext vor. Dabei verwenden wir im zweiten Ansatz eine Methode, die eng mit dem Konzept zur Einführung von Strömen in der funktionalen Programmiersprache SCHEME verwandt ist.

Als nächstes erweitern wir Frege-Strukturen um Universen, das sind Mengen im Sinne der Frege-Strukturen mit natürlichen Abschlußeigenschaften bezüglich des Wahrheitsprädikates. Ein verwandter Ansatz findet sich bei Cantini, der Frege-Strukturen durch explizit geschichtete Wahrheitsprädikate erweitert [Can96]. Universen sind als Erweiterungen formaler Systeme vor allem aus Martin-Löfs Typentheorie bekannt [ML84] und im Rahmen applikativer Theorien mit Typen von Feferman [Fef82] und Marzetta [Mar93, Mar94] behandelt worden. Konzeptionell sind diese Universen auch eng mit zulässigen Mengen in der Kripke-Platek-Mengenlehre verwandt (s. [Jäg86]).

Die beweistheoretische Stärke von Frege-Strukturen mit Universen ergibt sich aus dem engen Zusammenhang mit Theorien transfinit iterierter Fixpunkte [JKSS9x]. Dabei zeigen wir, daß man bei einer einfachen Form von Induktion eine Theorie der vollen Stärke prädikativer Mathematik im Sinne von Feferman und Schütte

[Fef64, Sch64] erhält. Aufgrund der *uniformen* Bildung von Universen ergeben sich bei stärkeren Induktionsformen bereits *metaprädikative* Theorien, d.h. Theorien, die über die Grenze der Prädikativität hinausgehen, ohne echt imprädikativ zu werden.

Im letzten Abschnitt betrachten wir noch eine von Cantini [Can96] eingeführte Wahrheitstheorie, bei der die Axiome der Frege-Strukturen durch *Supervaluationsaxiome* ersetzt werden. Diese Theorie ist imprädikativ und beweistheoretisch äquivalent zu ID_1. Wir zeigen dann, daß sich ID_1 auch syntaktisch einbetten läßt, was bei den meisten anderen imprädikativen Ansätzen im applikativen Rahmen nicht möglich ist.

Danksagung

Für die Unterstützung bei der Durchführung dieser Arbeit habe ich zuerst Prof. G. Jäger und Dr. Th. Strahm zu danken. Auch Prof. A. Cantini, Dr. M. Marzetta und Dr. A. Setzer haben mit Anmerkungen und Diskussionen viel zu dieser Arbeit beigetragen. Für eine genaue Durchsicht des Textes danke ich weiter Dr. P. Minari und D. Neuhaus sowie S. Grieder und D., I. und D. Kahle.

Darüberhinaus möchte ich mich bei allen Freunden und Kollegen bedanken, mit denen ich in den letzten Jahren zusammengekommen bin und diskutiert habe. Ausdrücklich erwähnen will ich dabei Moez Alimohamed, Ph.D., und Dr. Daniel Mey.

Die Erstellung dieser Doktorarbeit wurde vom Schweizerischen Nationalfonds finanziell unterstützt.

Kapitel 1

Applikative Theorien

1.1 BON

In diesem Abschnitt führen wir die applikative Theorie BON ein und stellen ihre zentralen Eigenschaften zusammen.

1.1.1 Logik partieller Terme

Applikative Theorien bauen auf der von Beeson in [Bee85] eingeführten *Logik partieller Terme* auf. Diese Logik zeichnet sich dadurch aus, daß (typenfreie) Terme beliebig aufeinander angewandt werden dürfen, d.h. *Selbstapplikation* zugelassen ist. Allerdings ist die Logik *partiell*, d.h. es gibt ein spezielles Relationssymbol $\downarrow$, um auszudrücken, daß ein Term definiert ist bzw. existiert. Eine kanonische Interpretation dafür ist z.B., daß ein durch einen Term repräsentiertes Computerprogramm terminiert. Die Quantoren sind in dieser Logik auf die definierten Terme eingeschränkt, was durch eine zusätzliche Voraussetzung in den Quantorenaxiomen zum Ausdruck kommen wird. Die Logik ist auch *strikt*, d.h. unter anderem, daß man aus der Definiertheit von Teiltermen auf die Definiertheit des ganzen Terms schließen darf. Diese axiomatische Forderung entspricht der „call-by-value"-Evaluation in funktionalen Programmiersprachen.

Eine Sprache $\mathcal{L}$ für die Logik partieller Terme umfaßt

- abzählbar unendlich viele Individuenvariablen $x, y, z, u, v, w, f, g, h, \ldots$ (ggf. mit Indizes),
- endlich oder abzählbar unendlich viele Individuenkonstanten,
- ein zweistelliges Funktionssymbol $\cdot$ für die Applikation,
- das einstellige Relationssymbol $\downarrow$ für die Definiertheit und das zweistellige $=$ für die Gleichheit zwischen Individuen,
- endlich viele weitere Relationssymbole mit jeweils zugeordneter Stelligkeit,

- die logischen Junktoren $\wedge$, $\neg$ und den Quantor $\forall$,
- Klammern und Punkt als Hilfszeichen.

Im folgenden werden wir bei der Angabe der Sprache einer Theorie jeweils nur die Individuenkonstanten und die zusätzlichen Relationssymbole auflisten.

$\mathcal{L}$-Terme $(r, s, t, r_1, s_1, t_1, \ldots)$ werden ausgehend von den Individuenvariablen und Individuenkonstanten mittels der Termapplikation $\cdot$ gebildet, wobei wir für $(t \cdot s)$ in der Regel $t\, s$ mit linksassoziativer Bindungspriorität schreiben.

Die $\mathcal{L}$-Formeln $(\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1, \ldots)$ werden wie folgt definiert: Ist R ein n-stelliges Relationssymbol, so ist $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel. Sind φ und ψ Formeln, so sind auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$ sowie $\forall x.\varphi$ Formeln.

Da sämtliche in dieser Arbeit behandelten applikativen Theorien auf klassischer Logik beruhen, lassen sich Disjunktion ($\vee$), Implikation ($\rightarrow$), Äquivalenz ($\leftrightarrow$) und Existenzquantifikation ($\exists$) wie üblich als Abkürzungen einführen. Soweit wie möglich wollen wir auf unnötige Klammern verzichten und legen fest, daß $\neg$ stärker als $\wedge$ und $\vee$ und diese stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ binden sollen. Der Wirkungsbereich eines Quantors erstrecke sich bis zur nächsten schließenden Klammer, die nicht hinter ihm geöffnet wurde bzw. bis zum Ende einer Formel. Aufeinander folgende, gleichartige Quantoren fassen wir durch Kommaschreibweise zusammen, d.h. $\forall x_1, \ldots, x_n.\varphi$ steht für $\forall x_1. \ldots \forall x_n.\varphi$ (bei $\exists$ entsprechend).

Die Menge der freien Variablen eines Terms $(\mathrm{FV}(t))$ bzw. einer Formel $(\mathrm{FV}(\varphi))$ sei kanonisch definiert, und wir identifizieren Formeln, die sich nur durch gebundene Umbenennung unterscheiden. Terme ohne (freie) Variablen nennen wir geschlossen.

Für $t\downarrow$ sagen wir auch „t ist definiert“ oder „t existiert“. Zudem führen wir eine *partielle Gleichheit* und eine (starke Form von) *Ungleichheit* ein:

$$\begin{aligned} t \simeq s \quad &:\Leftrightarrow \quad t\downarrow \vee\, s\downarrow \rightarrow t = s, \\ t \neq s \quad &:\Leftrightarrow \quad t\downarrow \wedge\, s\downarrow \wedge\, \neg t = s. \end{aligned}$$

$t[s_1, \ldots, s_n/x_1, \ldots, x_n]$ und $\varphi[s_1, \ldots, s_n/x_1, \ldots, x_n]$, $n \geq 1$, stehen für die simultane Substitution von $s_1, \ldots, s_n$ für (alle (freien) Vorkommnisse von) $x_1, \ldots, x_n$ im Term t bzw. in der Formel φ. Falls sich n aus dem Kontext ergibt, schreiben wir auch $t[\vec{s}/\vec{x}]$ bzw. $\varphi[\vec{s}/\vec{x}]$. Häufig werden wir allerdings auch nur $t[\vec{s}]$ bzw. $\varphi(\vec{s})$ schreiben, wenn im gleichen Kontext mit $t[\vec{x}]$ bzw. $\varphi(\vec{x})$ die zu substituierenden Variablen markiert wurden.

Wir formulieren die applikativen Theorien in Form von Hilbert-Kalkülen mit folgenden logischen Axiomen:

I. Eine vollständige Axiomatisierung der **klassischen Aussagenlogik**.

II. **Quantorenaxiome**

(Q1) $\forall x.\varphi \wedge t\downarrow \to \varphi[t/x]$,

(Q2) $\varphi[t/x] \wedge t\downarrow \to \exists x.\varphi$.

III. **Gleichheitsaxiome**

(E1) $x = x$,

(E2) $t \simeq s \wedge \varphi(t) \to \varphi(s)$.

IV. **Striktheitsaxiome**

(S1) $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n) \to t_1\downarrow \wedge \ldots \wedge t_n\downarrow$, falls R ein n-stelliges Relationssymbol ist,

(S2) $t\,s\downarrow \to t\downarrow \wedge s\downarrow$,

(S3) $c\downarrow$, falls c eine Konstante ist,

(S4) $x\downarrow$.

Als Regeln haben wir

I. **Modus Ponens**

(MP) $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$

II. **Quantorenregeln**

(Q3) $\dfrac{B \to A}{B \to \forall x.A} \quad x \notin \mathrm{FV}(B)$,

(Q4) $\dfrac{A \to B}{(\exists x.A) \to B} \quad x \notin \mathrm{FV}(B)$.

Die hier gegebene Axiomatisierung geht auf Beeson [Bee85] zurück und entspricht der E^{+}-Logik mit Striktheit und Gleichheit von Troelstra und van Dalen [TvD88a]. Alternativ zur Logik partieller Terme kann man auch eine partielle Logik definieren, in der die Variablen nicht a priori definiert sind. Diese in [TvD88a] E-Logik genannte Version ist von Scott in [Sco79] eingeführt worden.

Die ersten Formulierungen applikativer Theorien bzw. expliziter Mathematik, vor allem T_0 von Feferman [Fef75, Fef79] und EON von Beeson [Bee85], waren im Gegensatz zu den heutigen Fassungen intuitionistisch. Auch die im zweiten Teil dieser Arbeit behandelten Frege-Strukturen waren ursprünglich in einem intuitionistischen Rahmen definiert, s. [Acz80].

1.1.2 Die Theorie BON

Die Theorie BON („basic theory of operations and numbers") wurde von Feferman und Jäger in [FJ93] als Einschränkung der Theorie EON von Beeson [Bee85] eingeführt. Sie ist in der Sprache $\mathcal{L}_p$ formuliert, die als eine Sprache der Logik partieller Terme folgende neue Symbole enthält:

- Individuenkonstanten k, s (Kombinatoren), $\mathsf{p}, \mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1$ (Paarbildung), $0, \mathsf{s_N}, \mathsf{p_N}$ (Null, Nachfolger, Vorgänger), $\mathsf{d_N}$ (Fallunterscheidung auf N), $\mathsf{r_N}$ (primitive Rekursion),

- das einstellige Relationssymbol N (natürliche Zahlen).

Als abkürzende Terme schreiben wir t' für $\mathsf{s_N}\, t$, 1 für $0'$ und $\overline{n}$ für $\underbrace{\mathsf{s_N} \ldots \mathsf{s_N}}_{n-\text{mal}} 0$, $n \in I\!N$.

Terme der Form $\overline{n}$ nennen wir *Ziffern*. Als Abkürzungen definieren wir auch folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
\forall x : \mathsf{N}.\varphi \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x.\mathsf{N}(x) \to \varphi, \\
\exists x : \mathsf{N}.\varphi \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists x.\mathsf{N}(x) \wedge \varphi, \\
(t : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{N}(t\, x), \\
(t : \mathsf{N}^{n+1} \to \mathsf{N}) \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x : \mathsf{N}.(t\, x : \mathsf{N}^n \to \mathsf{N}), \\
t \in P(\mathsf{N}) \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x : \mathsf{N}.t\, x = 0 \vee t\, x = 1.
\end{aligned}$$

Die Elemente von $P(\mathsf{N})$ sind die *Mengen* im Sinne von BON, d.h. wir betrachten nur Teilmengen von N, die durch charakteristische Funktionen gegeben sind.

Die nicht-logischen Axiome von BON umfassen:

I. **Partielle kombinatorische Algebra**

(1) $\mathsf{k}\, x\, y = x$,

(2) $\mathsf{s}\, x\, y \downarrow \wedge\ \mathsf{s}\, x\, y\, z \simeq x\, z\, (y\, z)$.

II. **Paarbildung und Projektionen**

(3) $\mathsf{p}_0\, (\mathsf{p}\, x\, y) = x \wedge \mathsf{p}_1\, (\mathsf{p}\, x\, y) = y$.

III. **Natürliche Zahlen**

(4) $\mathsf{N}(0) \wedge \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{N}(x')$,

(5) $\forall x : \mathsf{N}.x' \neq 0 \wedge \mathsf{p_N}\, (x') = x$,

(6) $\forall x : \mathsf{N}.x \neq 0 \to \mathsf{N}(\mathsf{p_N}\, x) \wedge (\mathsf{p_N}\, x)' = x$.

IV. **Fallunterscheidung auf N**

(7) $\mathsf{N}(v) \wedge \mathsf{N}(w) \wedge v = w \to \mathsf{d_N}\, x\, y\, v\, w = x$,

(8) $\mathsf{N}(v) \wedge \mathsf{N}(w) \wedge v \neq w \to \mathsf{d_N}\, x\, y\, v\, w = y$.

V. **Primitive Rekursion auf N**

(9) $(f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \wedge (g : \mathsf{N}^3 \to \mathsf{N}) \to (\mathsf{r_N}\, f\, g : \mathsf{N}^2 \to \mathsf{N})$,

(10) $(f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \wedge (g : \mathsf{N}^3 \to \mathsf{N}) \wedge \mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y) \wedge h = \mathsf{r_N}\, f\, g \to$
$h\, x\, 0 = f\, x \wedge h\, x\, (y') = g\, x\, y\, (h\, x\, y)$.

In BON ist noch keine Induktion enthalten. Wir werden später vier verschiedene Formen vollständiger Induktion über N betrachten. Die schwächste davon reicht allerdings noch nicht aus, um primitive Rekursion auf N zu beweisen. Aus diesem Grund nehmen wir $\mathsf{r_N}$ explizit in die Axiomatisierung von BON auf, auch wenn es bei stärkeren Induktionsformen redundant ist.

1.1.3 Totalität

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir im wesentlichen mit *totalen applikativen Theorien* arbeiten. Dabei sind alle Terme definiert im Sinne von $\downarrow$, d.h. das folgende Totalitätsaxiom ist erfüllt:

(Tot) $$\forall x, y.\, x\, y \downarrow.$$

Alternativ zu der Hinzunahme von (Tot) lassen sich die totalen Varianten auch direkt definieren, wobei die jeweils unterliegende Sprache partieller Terme durch eine *Sprache für eine totale applikative Theorie* ersetzt wird. Dabei verzichtet man lediglich auf das Relationssymbol $\downarrow$, während alle anderen Symbole beibehalten werden. Die Logik der partiellen Terme wird dann durch die Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit ersetzt.

Bei der BON entsprechenden, über der reduzierte Sprache $\mathcal{L}_t$ formulierten, totalen Theorie TON muß bei den nicht-logischen Axiomen nur das Axiom I.(2) für den Kombinator s durch

$$\mathsf{s}\, x\, y\, z = x\, z\, (y\, z)$$

ersetzt werden. Es folgt dann sofort, daß sich TON und BON + (Tot) syntaktisch ineinander übersetzen lassen. Eine ausführliche Diskussion von TON findet sich in der Arbeit [JS95] von Jäger und Strahm.

1.1.4 Erste Folgerungen

Zuerst wollen wir λ-Terme einführen, die es gestatten, Funktionen auch in einer kombinatorischen Logik lesbar darzustellen. In TON lassen sich diese auf einfache

Weise definieren (s. [Bar85, Prop. 2.2.1.]):

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\mathsf{t}} x.x &:\equiv \mathsf{s}\,\mathsf{k}\,\mathsf{k}, && \\
\lambda_{\mathsf{t}} x.t &:\equiv \mathsf{k}\,t, && \text{falls } x \notin \mathrm{FV}(t), \\
\lambda_{\mathsf{t}} x.r\,s &:\equiv \mathsf{s}\,(\lambda_{\mathsf{t}} x.r)\,(\lambda_{\mathsf{t}} x.s), && \text{sonst.}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich:

Lemma 1 Zu jeder Variablen x und jedem $\mathcal{L}_t$-Term t gibt es einen $\mathcal{L}_t$-Term $\lambda_{\mathsf{t}} x.t$ mit $\mathrm{FV}(\lambda_{\mathsf{t}} x.t) = \mathrm{FV}(t) \backslash \{x\}$, so daß gilt:

$$\mathsf{TON} \vdash (\lambda_{\mathsf{t}} x.t)\,x = t.$$

In BON folgt bei dieser Definition aufgrund von Striktheit für $\neg\, t \downarrow$ auch $\neg\, \lambda_{\mathsf{t}} x.t \downarrow$, falls $x \notin \mathrm{FV}(t)$. Da Funktionen, auch wenn sie undefinierte Werte liefern, immer definiert sein sollten, ist die Definition im partiellen Fall etwas komplizierter (s. [Bee85, S. 101]).

Satz 2 Zu jeder Variablen x und jedem $\mathcal{L}_p$-Term t gibt es einen $\mathcal{L}_p$-Term $\lambda_{\mathsf{p}} x.t$ mit $\mathrm{FV}(\lambda_{\mathsf{p}} x.t) = \mathrm{FV}(t) \backslash \{x\}$, so daß gilt:

$$\mathsf{BON} \vdash \lambda_{\mathsf{p}} x.t \downarrow \wedge\, (\lambda_{\mathsf{p}} x.t)\,x \simeq t.$$

Beweis: Wir setzen induktiv über den Aufbau von t:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\mathsf{p}} x.x &:\equiv \mathsf{s}\,\mathsf{k}\,\mathsf{k}, && \\
\lambda_{\mathsf{p}} x.y &:\equiv \mathsf{k}\,y, && \text{falls } x \not\equiv y, \\
\lambda_{\mathsf{p}} x.c &:\equiv \mathsf{k}\,c, && \text{falls } c \text{ eine Konstante}, \\
\lambda_{\mathsf{p}} x.r\,s &:\equiv \mathsf{s}\,(\lambda_{\mathsf{p}} x.r)\,(\lambda_{\mathsf{p}} x.s). &&
\end{aligned}
$$

Die geforderten Eigenschaften folgen durch einfaches Nachrechnen. □

Bemerkung 3

1. Die Definition der λ_{p}-Terme ist anders als im Totalen nicht mit Substitution verträglich, d.h. es gilt im allgemeinen nicht $(\lambda_{\mathsf{p}} x.t)[s/y] \simeq \lambda_{\mathsf{p}} x.(t[s/y])$ für $x \not\equiv y$ (s. [Kah92, Abs. 3.2] und [Str96b, Fef95]).

2. Wir werden in dieser Arbeit noch eine Reihe von Erweiterungen von TON und BON betrachten. Die Definition der λ-Terme ist von der Einführung neuer Individuenkonstanten aber nicht betroffen und erfolgt in allen Theorien in den oben angegebenen Formen.

Den Index bei λ werden wir im weiteren weglassen, da es sich aus dem Kontext ergibt, ob wir im Totalen oder Partiellen arbeiten. Zudem fassen wir aufeinander folgende λ-Terme wie bei den Quantoren durch Kommaschreibweise zusammen, d.h. $\lambda x_1, \ldots, x_n.t$ steht für $\lambda x_1. \ldots \lambda x_n.t$.

Die Ausdrucksstärke applikativer Theorien zeigt sich zentral an der Möglichkeit, einen *Rekursor* zu definieren.

Satz 4 [CF74, S.178] Es gibt einen $\mathcal{L}_t$-Term $\mathsf{rec_t}$, so daß

$$\mathsf{TON} \vdash \forall f.\mathsf{rec_t}\, f = f\,(\mathsf{rec_t}\, f).$$

Beweis: Der auch *paradoxer* oder Y-*Kombinator* genannte Term $\mathsf{rec_t}$ wird definiert als:

$$\mathsf{rec_t} :\equiv \lambda f.(\lambda x.f\,(x\,x))\,(\lambda x.f\,(x\,x)).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{rec_t}\, f &= (\lambda x.f\,(x\,x))\,(\lambda x.f\,(x\,x)) \\ &= f\,((\lambda x.f\,(x\,x))\,(\lambda x.f\,(x\,x))) \\ &= f\,(\mathsf{rec_t}\, f). \end{aligned}$$ $\square$

Diese Definition würde im partiellen Kontext wie bei den λ-Termen im allgemeinen nicht die gewünschte Existenzbehauptung $\mathsf{rec}\, f \downarrow$ für rekursiv definierte Funktionen liefern. Es läßt sich aber analog zur λ-Abstraktion eine etwas kompliziertere Definition angeben, die diese erfüllt. Allerdings zieht sie eine Abschwächung des Rekursionstheorems nach sich, bei dem die Rekursionsgleichung nur punktweise gilt:

Satz 5 [Bee85, S. 103] Es gibt einen $\mathcal{L}_p$-Term $\mathsf{rec_p}$, so daß

$$\mathsf{BON} \vdash \mathsf{rec_p}\, f \downarrow \wedge\, \forall x.\mathsf{rec_p}\, f\, x \simeq f\,(\mathsf{rec_p}\, f)\, x.$$

Beweis: Wir setzen

$$\mathsf{rec_p} :\equiv \lambda f.(\lambda y, x.f\,(y\,y)\,x)\,(\lambda y, x.f\,(y\,y)\,x).$$

Dann gilt $\mathsf{rec_p}\, f \downarrow$ mit Satz 2 und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathsf{rec_p}\, f\, x &\simeq (\lambda y, x.f\,(y\,y)\,x)\,(\lambda y, x.f\,(y\,y)\,x)\,x \\ &\simeq f\,((\lambda y, x.f\,(y\,y)\,x)\,(\lambda y, x.f\,(y\,y)\,x))\,x \\ &\simeq f\,(\mathsf{rec_p}\, f)\,x. \end{aligned}$$ $\square$

Wie bei λ werden wir auch bei rec den Index weglassen. Bei der Definition von Funktionen mittels Rekursion werden wir uns auf die Angabe der Rekursionsgleichung beschränken, d.h.

$$f\,x :\equiv t[f, x]$$

steht für
$$f :\equiv \mathsf{rec}\, \lambda g, x.t[g, x].$$

Wir zeigen nun, daß es einen $\mathcal{L}_p$-Term gibt, der beweisbar nicht zu N gehört. Ein solcher Term ist in der totalen Theorie recht einfach anzugeben, indem man über die inverse Signumfunktion diagonalisiert. Im Partiellen benutzen wir einen ähnlichen Trick wie für den Rekursor, indem wir durch eine eingeschobene λ-Abstraktion die beim „totalen Term" auftretenden Striktheitsprobleme umgehen.

Satz 6 Es gibt einen $\mathcal{L}_p$-Term $\mathsf{not_N}$, so daß gilt:
$$\mathsf{BON} \vdash \neg\mathsf{N}(\mathsf{not_N}).$$

Beweis: Wir setzen
$$\mathsf{not_N} :\equiv \mathsf{rec}\,(\lambda x, y.\mathsf{d_N}\, 1\, 0\, (x\, y)\, 0)\, 0.$$

Angenommen, es gilt $\mathsf{N}(\mathsf{not_N})$. Dann führt $\mathsf{not_N} = 0$ zu einem Widerspruch:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathsf{not_N} \\ &= \mathsf{rec}\,(\lambda x, y.\mathsf{d_N}\, 1\, 0\, (x\, y)\, 0)\, 0 \\ &= (\lambda x, y.\mathsf{d_N}\, 1\, 0\, (x\, y)\, 0)\, (\mathsf{rec}\,(\lambda x, y.\mathsf{d_N}\, 1\, 0\, (x\, y)\, 0))\, 0 \\ &= (\lambda y.\mathsf{d_N}\, 1\, 0\, ((\mathsf{rec}\,(\lambda x, y.\mathsf{d_N}\, 1\, 0\, (x\, y)\, 0))\, y)\, 0)\, 0 \\ &= \mathsf{d_N}\, 1\, 0\, ((\mathsf{rec}\,(\lambda x, y.\mathsf{d_N}\, 1\, 0\, (x\, y)\, 0))\, 0)\, 0 \\ &= \mathsf{d_N}\, 1\, 0\, \mathsf{not_N}\, 0 \\ &= \mathsf{d_N}\, 1\, 0\, 0\, 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Da $\mathsf{not_N} \neq 0$ ebenso zu einem Widerspruch führt, ist die Annahme widerlegt. □

Für den Term $\mathsf{not_N}$ läßt sich weder $\mathsf{not_N} \downarrow$ noch $\neg\, \mathsf{not_N} \downarrow$ zeigen. Wir werden sehen, daß es Modelle gibt, in denen $\mathsf{not_N}$ keinen Wert besitzt (z.B. das rekursionstheoretische Modell), als auch solche, in denen jeder Term, also auch $\mathsf{not_N}$, definiert ist (z.B. das totale Termmodell). In diesen totalen Modellen gehört $\mathsf{not_N}$ aber nicht zur Interpretation von N. Satz 6 sagt aus, daß sich ein Term, der nicht zu N gehört, uniform für alle Modelle definieren läßt. Derartige Termkonstruktionen können in applikativen Theorien sehr allgemein angeben werden:

Satz 7 Sei $\mathcal{T}$ eine Erweiterung von BON, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien Formeln der Sprache von $\mathcal{T}$ mit $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi) = \{x\}$ und neg_ψ ein Term der Sprache von $\mathcal{T}$, so daß gilt:
$$\mathcal{T} \vdash \varphi(x) \to (\psi(x) \leftrightarrow \neg\psi(\mathsf{neg}_\psi\, x)).$$

Dann gibt es einen Term not_φ mit
$$\mathcal{T} \vdash \neg\varphi(\mathsf{not}_\varphi).$$

Beweis: Wir setzen

$$\mathsf{not}_\varphi :\equiv \mathsf{rec}\,(\lambda f, x.\mathsf{neg}_\psi\,(f\,x))\,0.$$

Dann ergibt sich unter der Voraussetzung $\varphi(\mathsf{not}_\varphi)$:

$$\begin{aligned}
\psi(\mathsf{not}_\varphi) &\leftrightarrow \psi(\mathsf{rec}\,(\lambda f, x.\mathsf{neg}_\psi\,(f\,x))\,0)\\
&\leftrightarrow \psi((\lambda f, x.\mathsf{neg}_\psi\,(f\,x))\,(\mathsf{rec}\,(\lambda f, x.\mathsf{neg}_\psi\,(f\,x)))\,0)\\
&\leftrightarrow \psi(\mathsf{neg}_\psi\,(\mathsf{rec}\,(\lambda f, x.\mathsf{neg}_\psi\,(f\,x))\,0))\\
&\leftrightarrow \psi(\mathsf{neg}_\psi\,\mathsf{not}_\varphi)\\
&\leftrightarrow \neg\psi(\mathsf{not}_\varphi).
\end{aligned}$$

Damit ist die Annahme zu einem Widerspruch geführt. □

Offensichtlich wird Satz 6 ein Korollar dieses Satzes, wenn man $\varphi(x) :\Leftrightarrow \mathsf{N}(x)$, $\psi(x) :\Leftrightarrow x = 0$ und $\mathsf{neg}_\psi :\equiv \lambda x.\mathsf{d_N}\,1\,0\,x\,0$ setzt.

Bemerkung 8 Schlüter hat in [Schl95] eine applikative Theorie eingeführt, die auf einer primitiv-rekursiven Applikation aufbaut. In einer solchen Theorie ist der Rekursionssatz in der allgemeinen Form nicht mehr gültig, und es gibt totale Modelle, deren Universum die natürlichen Zahlen sind. In diesen Modellen ist jeder Term definiert und gehört zu N, woraus sich ergibt, daß ein Term mit der Eigenschaft von $\mathsf{not_N}$ nicht definierbar ist.

Der Term $\mathsf{not_N}$ eignet sich gut, um bei Fallunterscheidungen für gewisse Argumente einen Funktionswert sicherzustellen, der außerhalb von N liegen soll. Derartige Fallunterscheidungen werden wir häufiger benötigen. Bei einer einfachen Verwendung von $\mathsf{d_N}$ zur Beschreibung einer solchen Fallunterscheidung gerät man allerdings mit der Striktheit in Konflikt. Diese verlangt, daß beide möglichen Werte von $\mathsf{d_N}$ definiert sind, unabhängig von der letztendlich getroffenen Alternative. Das heißt z.B., daß $\mathsf{d_N}\,0\,\mathsf{not_N}\,x\,0$ für $x = 0$ nur dann beweisbar gleich 0 wäre, wenn man $\mathsf{not_N}\downarrow$ beweisen könnte. Dies ist in BON allerdings nicht der Fall. Dennoch gibt es eine einfache Möglichkeit, dieses Striktheitsproblem bei Fallunterscheidungen zu umgehen. Statt einen möglicherweise undefinierten Term t als Wert in $\mathsf{d_N}$ einzusetzen, nimmt man die beweisbar existierende Funktion $\lambda x.t$ mit $x \notin \mathrm{FV}(t)$ und wendet erst auf das Ergebnis der Fallunterscheidung 0 an. Zugleich muß man natürlich auch den alternativen Wert zu einer Funktion erheben. Dementsprechend repräsentiert man also z.B. eine nicht-strikte Fallunterscheidung der Form

$$f\,x \simeq \begin{cases} t, & \text{falls } x = 0,\\ s, & \text{falls } \mathsf{N}(x) \wedge x \neq 0 \end{cases}$$

durch $\mathsf{d_N}\,(\lambda y.t)\,(\lambda y.s)\,x\,0\,0$, wobei $y \notin \mathrm{FV}(t, s)$. Diese Form der Repräsentation wollen wir „nicht-strikte Fallunterscheidung“ nennen.

Ein ähnliches Striktheitsproblem wie bei der Fallunterscheidung wird uns im Zusammenhang mit den Frege-Strukturen bei der Repräsentation nicht definierter Terme noch einmal begegnen, wo wir eine analoge Lösungsmöglichkeit vorschlagen (s. Abs. 2.2).

1.1.5 Induktionen

Bisher haben wir nur rein kombinatorische Eigenschaften von BON und TON untersucht. Mathematisch interessant werden die Theorien erst durch geeignete Formen von Induktion. Im folgenden werden wir vier, im Kontext applikativer Theorien sehr natürliche Formen vollständiger Induktion über N betrachten.

1. Mengeninduktion auf N (S-I_N)

$$f \in P(\mathsf{N}) \wedge f\,0 = 0 \wedge (\forall x : \mathsf{N}.f\,x = 0 \rightarrow f\,(x') = 0) \rightarrow \forall x : \mathsf{N}.f\,x = 0.$$

2. Operationeninduktion auf N (O-I_N)

$$f\,0 = 0 \wedge (\forall x : \mathsf{N}.f\,x = 0 \rightarrow f\,(x') = 0) \rightarrow \forall x : \mathsf{N}.f\,x = 0.$$

3. N-Induktion auf N ($\mathsf{N}\text{-I}_\mathsf{N}$)

$$\mathsf{N}(f\,0) \wedge (\forall x : \mathsf{N}.\mathsf{N}(f\,x) \rightarrow \mathsf{N}(f\,(x'))) \rightarrow \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{N}(f\,x).$$

4. Formelinduktion auf N (F-I_N)

$$\varphi(0) \wedge (\forall x : \mathsf{N}.\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')) \rightarrow \forall x : \mathsf{N}.\varphi(x).$$

Mit Hilfe der λ-Abstraktion ergibt sich unmittelbar, daß die Operationeninduktion äquivalent zu der syntaktisch allgemeineren Form von Induktion über x für Formeln der Form $t[x] = 0$ mit beliebigem Term t ist. Dazu setzt man f aus (O-I_N) einfach $\lambda x.t[x]$.

Offensichtlich ist (S-I_N) eine Abschwächung von (O-I_N), und wir werden zeigen, daß (S-I_N) auch aus ($\mathsf{N}\text{-I}_\mathsf{N}$) folgt. Die logische Beziehung zwischen (O-I_N) und ($\mathsf{N}\text{-I}_\mathsf{N}$) läßt sich dagegen nicht ohne weiteres angeben. Im Abschnitt 1.2 werden wir mit dem Begriff der N-*Striktheit* einen Ansatz vorstellen, der eine Äquivalenz beider Induktionsformen nach sich zieht.

Für den Nachweis, daß Mengeninduktion aus N-Induktion folgt, benötigen wir nun die nicht-strikte Fallunterscheidung zusammen mit dem Term not_N. Dabei zeigen wir zuerst, daß sich die Formel $t = 0$ durch eine Konjunktion von zwei Aussagen über N schreiben läßt:

Lemma 9 $\mathsf{BON} \vdash t = 0 \leftrightarrow \mathsf{N}(t) \wedge \mathsf{N}(\mathsf{d}_\mathsf{N}\,(\lambda z.0)\,(\lambda z.\mathsf{not}_\mathsf{N})\,t\,0\,0)$.

Beweis: Die Richtung von links nach rechts ist trivial. Für die Gegenrichtung erhält man aus $\mathsf{N}(t)$ und $t \neq 0$ sofort $\mathsf{d}_\mathsf{N}\,(\lambda z.0)\,(\lambda z.\mathsf{not}_\mathsf{N})\,t\,0\,0 \simeq (\lambda z.\mathsf{not}_\mathsf{N})\,0 \simeq \mathsf{not}_\mathsf{N}$, was $\neg\mathsf{N}(\mathsf{not}_\mathsf{N})$ widerspricht. □

Satz 10 $\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-I}_\mathsf{N}) \vdash (\text{S-I}_\mathsf{N})$.

Beweis: Aus der Voraussetzung $f \in P(\mathsf{N})$ von (S-$\mathrm{I_N}$) folgt $\mathsf{N}(f\,x)$ für $\mathsf{N}(x)$, so daß wir die Induktionsformel $f\,x = 0$ in diesem Fall aufgrund des vorhergehenden Lemmas durch $\mathsf{N}(\mathsf{d_N}\,(\lambda z.0)\,(\lambda z.\mathsf{not_N})\,(f\,x)\,0\,0)$ ersetzen dürfen. Damit folgt aber auch (S-$\mathrm{I_N}$) aus (N-$\mathrm{I_N}$). □

Bemerkung 11 Um mit Lemma 9 aus (N-$\mathrm{I_N}$) auch (O-$\mathrm{I_N}$) zu bekommen, müßte man eine Konjunktion aus zwei Aussagen über N zu einer einzigen über N zusammenfassen können. Daß sich aber ein Term $\mathsf{and_N}$ mit $\mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y) \leftrightarrow \mathsf{N}(\mathsf{and_N}\,x\,y)$ in BON nicht definieren läßt, werden wir in Abschnitt 1.2 zeigen. Dort werden wir auch sehen, daß es keinen *Semientscheider* für N gibt, d.h. es gibt keinen Term $\mathsf{sd_N}$ mit $\mathsf{sd_N}\,x = 0 \leftrightarrow \mathsf{N}(x)$, der umgekehrt eine direkte Übersetzung von (N-$\mathrm{I_N}$) in (O-$\mathrm{I_N}$) erlauben würde.

Nun führen wir noch den rekursionstheoretischen μ-Operator in BON ein. Dazu definiert man sich zuerst mit Hilfe der primitiven Rekursion charakteristische Funktionen für die Kleiner- bzw. Größerrelation auf N, für die wir $t < s$ bzw. $s > t$ schreiben. Zum Beweis der Adäquatheit des repräsentierenden Terms werden wir allerdings bereits Formelinduktion benötigen.

Satz 12 [TvD88a, Ch. 9, 3.10] Es gibt einen $\mathcal{L}_p$-Term μ_{rec}, so daß gilt:

$$\begin{aligned}\mathsf{BON} + (\mathrm{F\text{-}I_N}) \vdash \forall f.((f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \vee (\exists y : \mathsf{N}.f\,y = 0 \wedge \forall z : \mathsf{N}.z < y \to \mathsf{N}(f\,z))) \to \\ \forall x : \mathsf{N}.\mu_{\mathsf{rec}}\,f = x \leftrightarrow f\,x = 0 \wedge \forall v : \mathsf{N}.v < x \to f\,v > 0.\end{aligned}$$

Beweis: Wir setzen

$$\mu_{\mathsf{rec}}\,f :\equiv \mathsf{d_N}\,(\mathsf{k}\,0)\,(\lambda g.(\mu_{\mathsf{rec}}\,g)')\,(f\,0)\,0\,(\lambda x.f\,(x')).$$

Damit läßt sich die Aussage durch Induktion über x beweisen, wobei volle Formelinduktion benötigt wird, da man im Induktionsschritt $\lambda x.f\,(x')$ für f in die Induktionsvoraussetzung einsetzen muß. □

1.1.6 Modelle

Es gibt eine ganze Reihe von Modellklassen für applikative Theorien, von denen wir in dieser Arbeit allerdings nur zwei näher betrachten werden. Die *rekursionstheoretischen* Modelle kann man als die intendierten Modelle im partiellen Fall auffassen, die totalen *Termmodelle* sind die Standardmodelle bei Totalität.

Feferman hat in [Fef75] ganz allgemein Modelle von BON und TON als Strukturen

$$\mathcal{M} = \langle M, =, App, N, \hat{\mathsf{k}}, \hat{\mathsf{s}}, \hat{\mathsf{p}}, \hat{\mathsf{p}}_0, \hat{\mathsf{p}}_1, \hat{0}, \hat{\mathsf{s}}_{\mathsf{N}}, \hat{\mathsf{p}}_{\mathsf{N}}, \hat{\mathsf{d}}_{\mathsf{N}}, \hat{\mathsf{r}}_{\mathsf{N}}\rangle$$

eingeführt. Dabei ist M das zugrundegelegte Universum, über das die definierten Terme im Sinne von $\downarrow$ laufen, $= \subset M \times M$ interpretiert die Gleichheit, $N \subset M$

das Prädikat N und $App \subset M^3$ die Applikation $x \cdot y \simeq z$. Schließlich müssen die Konstanten c durch geeignete Elemente $\hat{\mathsf{c}} \in M$ interpretiert werden. Die allgemeinen Gleichungen einer applikativen Theorie lassen sich leicht durch Induktion über den Termaufbau der in ihnen enthaltenen Terme in eine Form bringen, die sich mit Hilfe von App behandeln läßt (s. [FJ93, Abs. 5.2]). Erfüllt dann $\mathcal{M}$ alle Axiome von BON, so nennen wir $\mathcal{M}$ eine N-*erweiterte kombinatorische Algebra.*

Rekursionstheoretische Modelle

In rekursionstheoretischen Modellen (s. [Fef75, Abs. 4.1]) wählen wir sowohl als Universum M als auch als Interpretation N von N die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Die Gleichheit interpretieren wir durch Identität und die Applikation durch Kleene-Anwendung von Indizes geeigneter Klassen von Funktionen. Im einfachsten Fall kann man dafür die Indizes partiell rekursiver Funktionen wählen, d.h. $App(x, y, z)$ ist gegeben durch $\{x\}(y) \simeq z$, wobei $\{\cdot\}$ die üblichen Kleene-Klammern sind. Bei einer geeigneten Wahl der Indizes $\hat{\mathsf{c}}$ für die Konstanten c von $\mathcal{L}_p$ erhält man so ein Modell $\mathcal{PRF}$ von BON. Dieses Modell erfüllt auch $\forall x.\mathsf{N}(x)$, so daß mit Satz 6 folgt, daß $\mathcal{PRF}$ kein Modell von TON sein kann.

Termmodelle

Bei den Termmodellen (s. [Fef79, Abs. III.8], [Bee85, Abs. VI.6] oder [JS95]) lassen sich zwei wesentliche Varianten definieren, das *normale Termmodell* $\mathcal{CNT}$ und das *totale Termmodell* $\mathcal{CTT}$. Beiden Ansätzen liegt eine Reduktionsrelation ϱ auf den Termen der Sprache $\mathcal{L}_p$ zugrunde.

Definition 13 Die Reduktionsrelation ϱ sei durch die folgenden Klauseln 1. – 9. für alle Terme t, s und r der Sprache $\mathcal{L}_p$ gegeben:

1.	$\mathsf{k}\,t\,s$	ϱ	$t,$	
2.	$\mathsf{s_N}\,t\,s\,r$	ϱ	$t\,r\,(s\,r),$	
3.	$\mathsf{p_0}\,(\mathsf{p}\,t\,s)$	ϱ	$t,$	
4.	$\mathsf{p_1}\,(\mathsf{p}\,t\,s)$	ϱ	$s,$	
5.	$\mathsf{p_N}\,(\mathsf{s_N}\,\overline{n})$	ϱ	$\overline{n},$	$(n \in \mathbb{N}),$
6.	$\mathsf{d_N}\,t\,s\,\overline{n}\,\overline{n}$	ϱ	$t,$	$(n \in \mathbb{N}),$
7.	$\mathsf{d_N}\,t\,s\,\overline{n}\,\overline{m}$	ϱ	$s,$	$(n, m \in \mathbb{N}, n \neq m),$
8.	$\mathsf{r_N}\,t\,s\,r\,0$	ϱ	$t_0\,r,$	
9.	$\mathsf{r_N}\,t\,s\,r\,\overline{n+1}$	ϱ	$s\,r\,(\mathsf{r_N}\,t\,s\,r\,\overline{n}),$	$(n \in \mathbb{N}).$

Mit $\varrho^\star$ bezeichnen wir den reflexiven, transitiven und mit Anwendung verträglichen Abschluß von ϱ.

ϱ^+ sei die Relation, die der „leftmost-minimal“ Reduktionsstrategie mittels ϱ entspricht, d.h. in jedem Reduktionsschritt wird der am weitesten links stehende Teilterm, der keinen weiteren reduzierbaren Teilterm enthält, vermöge ϱ konvertiert (vgl. [TvD88b, S. 463] oder [Bee85, Abs. VI.4.4]).

Als Universum M des normalen Termmodells $\mathcal{CNT}$ wählen wir die Menge der geschlossenen Terme, die in Normalform bezüglich ϱ^+ sind, d.h. diejenigen Terme, in denen sich kein Teilterm mehr mittels ϱ reduzieren läßt, und interpretieren die Gleichheit wieder durch Identität. N wird als die Menge der Ziffern $\overline{n}, n \in I\!N$ interpretiert und die Konstanten durch sich selbst. Die Applikation $App(x, y, z)$ ist die Menge der Tripel $\langle a, b, c\rangle \in M^3$, so daß c die Normalform von a angewandt auf b vermöge ϱ^+ ist. Durch einfaches Nachrechnen ergibt sich

Satz 14 $\mathcal{CNT} \models \mathsf{BON}$.

Bemerkung 15 Das Modell $\mathcal{CNT}$ paßt relativ gut zu der Programmiersprache SCHEME, deren Evaluation mit der Reduktionsrelation ϱ^+ verwandt ist. Die λ-Notation und ihre Handhabung in SCHEME lassen sich dabei besonders gut durch die eben gerade nicht mit Substitution verträglichen λ-Terme in BON beschreiben. Dies wird von Stärk in [Stä9x] näher ausgeführt mit Hilfe des von Strahm in [Str96b] eingeführten, zu BON äquivalenten λ-Kalküls mit expliziter Substitution. Dabei entsprechen die expliziten Substitutionen den Umgebungen („environments") von SCHEME.

Für das totale Termmodell $\mathcal{CTT}$ wählen wir als Universum M die Menge aller geschlossenen Terme, die Konstanten werden wieder durch sich selbst interpretiert, und es gilt $App(a, b, c)$, falls c die Anwendung von a auf b ist. Zwei Terme sind gleich, falls sie ein gemeinsames Redukt bezüglich $\varrho^\star$ haben. Ein Term gehört zu N, falls er sich vermöge $\varrho^\star$ auf eine Ziffer reduzieren läßt. Zum Beweis, daß $\mathcal{CTT}$ ein Modell von BON ist, muß man sich nun überlegen, daß $\varrho^\star$ die Church-Rosser-Eigenschaft besitzt, was sich aber mit den üblichen Methoden leicht nachweisen (s. [Bar85, 7.2.]) läßt. Damit erhalten wir ein Modell, daß nun auch Totalität (Tot) erfüllt:

Satz 16 $\mathcal{CTT} \models \mathsf{TON}$.

Weitere Modelle

Weitere Modelle für applikative Theorien bauen auf den bekannten Modellen des ungetypten λ-Kalküls auf, so z.B. Engelers Graphmodell D_A, die Scott-Bereiche D_∞, $P\,\omega$ von Plotkin und Scott oder Böhm-Bäume, s. [Eng83, Bar85, HS86]. Zudem gibt Feferman eine sehr allgemeine Modellkonstruktion in [Fef79] an, die unter anderem dazu benutzt werden kann, mengentheoretische Modelle zu definieren.

1.1.7 Beweistheorie

Die Beweistheorie von BON mit (S-$\mathsf{I_N}$), (O-$\mathsf{I_N}$) und (N-$\mathsf{I_N}$) bzw. (F-$\mathsf{I_N}$) ergibt sich aus Äquivalenzen mit der primitiv rekursiven Arithmetik PRA bzw. Peano Arithmetik PA. Für die in dieser Arbeit benutzten beweistheoretischen Begriffe von Einbettbarkeit ($\trianglelefteq$) und Äquivalenz ($\equiv$) verweisen wir auf die Definitionen in [Fef88].

PRA und PA

Die Peano Arithmetik PA ist in der Sprache $\mathcal{L}_1$ formuliert, die (Zahlen-)Variablen $x, y, z, \ldots$, die Konstante 0 sowie Funktions- und Relationssymbole für alle primitiv rekursiven Funktionen und Relationen umfaßt. Die Terme $(r, s, t, \ldots)$ und Formeln $(\varphi, \psi, \ldots)$ werden wie üblich gebildet.

Die Theorie PA besteht aus den üblichen Axiomen für 0, Nachfolger und die primitiv rekursiven Funktionen und Relationen, sowie dem Schema der vollständigen Induktion über die natürlichen Zahlen für beliebige $\mathcal{L}_1$-Formeln φ:

$$(\mathcal{L}_1\text{-IND}_N) \qquad \varphi(0) \wedge (\forall x.\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')) \rightarrow \forall x.\varphi(x).$$

Das Subsystem der primitiv rekursiven Arithmetik PRA erhält man, indem die vollständige Induktion $(\mathcal{L}_1\text{-IND}_N)$ auf quantorenfreie $\mathcal{L}_1$-Formeln φ eingeschränkt wird, kurz (QF-IND_N).

Später betrachten wir auch noch kurz Theorien zweiter Stufe, deren Sprache $\mathcal{L}_2$ die Sprache $\mathcal{L}_1$ um Mengenvariablen $(X, Y, Z, \ldots)$ und die zweistellige Elementrelation $\in$ erweitert. Neben Gleichheit zwischen Mengen und Primformeln $t \in X$ sind dann auch Quantifikationen über Mengen erlaubt.

Formeln der Form $\exists x.\varphi$ bezeichnen wir als Σ^0_1-*Formeln*, falls φ eine quantorenfreie Formel ist, und Formeln der Form $\forall y.\psi$ als Π^0_2-*Formeln*, falls ψ eine Σ^0_1-Formel ist. $\mathcal{L}_2$-Formeln, die keine gebundenen Mengenquantoren enthalten, nennen wir *arithmetisch*.

Nach einem Resultat von Parsons [Par70] ist PRA mit Induktion für Σ^0_1-Formeln konservativ über PRA für Π^0_2-Sätze.

Untere Schranken

Interpretiert man die Variablen von $\mathcal{L}_1$ als Variablen in $\mathcal{L}_p$, die nur über N laufen, so läßt sich jede $\mathcal{L}_1$-Formel φ in eine $\mathcal{L}_p$- (bzw. $\mathcal{L}_t$-) Formel φ^N übersetzen. Mit Hilfe der primitiven Rekursion läßt sich weiter zeigen, daß jede quantorenfreie $\mathcal{L}_1$-Formel durch einen Term von $\mathcal{L}_p$ repräsentiert werden kann:

Lemma 17 Zu jeder quantorenfreien $\mathcal{L}_1$-Formel φ mit $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ gibt es einen $\mathcal{L}_p$-Term t_φ, so daß gilt:

1. $\mathsf{BON} + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \vdash \forall x_1 : \mathsf{N}, \ldots, x_n : \mathsf{N}.t_\varphi\, \vec{x} = 0 \vee t_\varphi\, \vec{x} = 1,$
2. $\mathsf{BON} + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \vdash \forall x_1 : \mathsf{N}, \ldots, x_n : \mathsf{N}.\varphi^N(\vec{x}) \leftrightarrow t_\varphi\, \vec{x} = 0.$

Bemerkung 18 Wir benötigen bei diesem Lemma bereits Mengeninduktion, um die mehrstelligen, primitiv-rekursiven Funktionen zu behandeln. Da $\mathsf{r_N}$ nur zweistellige Funktionen liefert, muß man zusätzliche Argumente mit Hilfe einer Kodierungsfunktion zusammenfassen. Zwar können wir mit $\mathsf{r_N}$ eine übliche Paarfunktion

$\lambda x, y.\langle x, y\rangle$ auf N, sowie Projektionen $\lambda x.(x)_0$ und $\lambda x.(x)_1$ von N nach N definieren, doch für den Beweis der zentralen Eigenschaft

$$\mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y) \to (\langle x, y\rangle)_0 = x \wedge (\langle x, y\rangle)_1 = y$$

braucht man dann (S-I_{N}).

Nun läßt sich (die Übersetzung von) (QF-IND_N) in BON mit (S-I_{N}) beweisen, und da ($\mathcal{L}_1$-IND_N) mit (F-I_{N}) gezeigt werden kann, folgt:

Satz 19 [FJ93, Theorem 4] Für alle $\mathcal{L}_1$-Formeln φ gilt:

1. $\mathsf{PRA} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{BON} + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^N$,
2. $\mathsf{PA} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{BON} + (\text{F-I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^N$.

Obere Schranken

Die oberen Schranken ergeben sich für beide Theorien BON und TON aus der Formalisierung des totalen Termmodells in PRA. Da dieses bei der Modellierung von Frege-Strukturen mit Universen noch eine Rolle spielen werden, skizzieren wir sie hier kurz, der Darstellung von Strahm in [JS95, Str96b] folgend.

Zuerst definiert man eine Gödelisierung $\ulcorner\cdot\urcorner$ der Terme von $\mathcal{L}_p$ (bzw. $\mathcal{L}_t$), bei der wir die Variablen nicht mitkodieren. Wir definieren also $\ulcorner x\urcorner = x$ und setzen dann die Definition mit Hilfe von Kodes $\ulcorner c\urcorner$ für alle Konstanten c in üblicher Weise auf zusammengesetzte Terme fort. Nun kann man ein primitiv-rekursives Prädikat $\mathrm{CTer}(x)$ einführen, das ausdrückt, daß x die Gödelnummer eines geschlossenen Terms ist, und eine primitiv-rekursive Funktion $\mathrm{num}(x)$, die die Gödelnummer der x-ten Ziffer liefert. Weiter kann man eine Σ^0_1-Formel $\mathrm{Red}_{\varrho^\star}(x, y)$ definieren, die ausdrückt, daß x und y Gödelnummern geschlossener Terme sind und daß der durch x repräsentierte Term auf den von y repräsentierten mittels $\varrho^\star$ reduziert werden kann. Nun formalisiert man das Termmodell $\mathcal{CTT}$ in PRA, indem man die Terme t durch ihre Gödelnummern $\ulcorner t\urcorner$ interpretiert, $(t = s)$ durch $\exists x.\mathrm{Red}_{\varrho^\star}(\ulcorner t\urcorner, x) \wedge \mathrm{Red}_{\varrho^\star}(\ulcorner s\urcorner, x)$ und $\mathsf{N}(t)$ durch $\exists x.\mathrm{Red}_{\varrho^\star}(\ulcorner t\urcorner, \mathrm{num}(x))$ übersetzt und diese Übersetzung kanonisch auf alle Formeln ausdehnt, wobei Quantoren auf CTer eingeschränkt werden. Für den Beweis der Einbettbarkeit ist dann zentral, daß sich die Church-Rosser-Eigenschaft von $\varrho^\star$ bereits in PRA nachweisen läßt. Die drei schwachen Induktionsformen (S-I_{N}), (N-I_{N}) und (O-I_{N}) folgen mit Σ^0_1-Induktion, für den Nachweis der Formelinduktion ist auch Formelinduktion in der Arithmetik nötig.

Zusammenfassend erhalten wir die folgenden beweistheoretischen Äquivalenzen.

Theorem 20

1. $\mathsf{BON} + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON} + (\text{N-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON} + (\text{O-I}_{\mathsf{N}}) \equiv$
   $\mathsf{TON} + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{TON} + (\text{N-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{TON} + (\text{O-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{PRA}$.
2. $\mathsf{BON} + (\text{F-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{TON} + (\text{F-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{PA}$.

1.2 N-Striktheit

In diesem Abschnitt untersuchen wir eine gewisse Ausdrucksschwäche applikativer Theorien. Dabei geht es um die Möglichkeit, vom Ergebnis einer (Funktions-)Anwendung auf Eigenschaften des Arguments zu schließen. Speziell hätte man gerne einen „Typcheck" auf N, um sicherzustellen, daß bei einer Funktionsanwendung, die einen Wert aus N liefert, auch das Argument aus N stammt. Analog zur Striktheit bezüglich Existenz führen wir dazu einen Begriff der N-*Striktheit* ein:

Definition 21 Wir nennen einen Term t (der Sprache einer Theorie $\mathcal{T}$) N-*strikt* (in $\mathcal{T}$), wenn gilt:

$$\mathcal{T} \vdash \forall x.\mathsf{N}(t\,x) \to \mathsf{N}(x).$$

1.2.1 Fehlende N-Striktheit in BON

Als erstes werden wir zeigen, daß es ein Modell von BON gibt, in dem die einzige N-strikte Funktion, die Werte aus N liefert, die Identität ist. Die Idee dabei ist, das Termmodell $\mathcal{CNT}$ um „Pseudozahlen" zu erweitern, die nicht zu N gehören, auf denen sich aber alle Kombinatoren wie auf den Ziffern von $\mathcal{CNT}$ verhalten. Es gibt also keinen Kombinator, der eine Unterscheidung von Ziffern und „Pseudozahlen" ermöglicht.

Definition 22 $\mathcal{CNT}^\star$ sei $\mathcal{CNT}$ erweitert um die Konstanten $\widetilde{0}$ und $\widetilde{\mathsf{s}_\mathsf{N}}$. Wir schreiben $\tilde{n}$ für $\underbrace{\widetilde{\mathsf{s}_\mathsf{N}}(\ldots(\widetilde{\mathsf{s}_\mathsf{N}}}_{n\text{-mal}}\widetilde{0})\ldots)$ $(n \in I\!N)$ und erweitern die Reduktionsrelation ϱ von $\mathcal{CNT}$ aus Def. 13 um folgende Klauseln:

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{5a.} & \mathsf{s}_\mathsf{N}\,\tilde{n} & \varrho & \overline{n+1}, & \\
\text{5b.} & \mathsf{p}_\mathsf{N}\,\widetilde{n+1} & \varrho & \overline{n}, & \\
\text{6a.} & \mathsf{d}_\mathsf{N}\,t\,s\,\tilde{n}\,\tilde{n} & \varrho & t, & \\
\text{6b.} & \mathsf{d}_\mathsf{N}\,t\,s\,\tilde{n}\,\overline{n} & \varrho & t, & \\
\text{6c.} & \mathsf{d}_\mathsf{N}\,t\,s\,\overline{n}\,\tilde{n} & \varrho & t, & \\
\text{7a.} & \mathsf{d}_\mathsf{N}\,t\,s\,\tilde{n}\,\widetilde{m} & \varrho & s, & (n \neq m), \\
\text{7b.} & \mathsf{d}_\mathsf{N}\,t\,s\,\tilde{n}\,\overline{m} & \varrho & s, & (n \neq m), \\
\text{7c.} & \mathsf{d}_\mathsf{N}\,t\,s\,\overline{n}\,\widetilde{m} & \varrho & s, & (n \neq m), \\
\text{8a.} & \mathsf{r}_\mathsf{N}\,t\,s\,r\,\widetilde{0} & \varrho & t\,r, & \\
\text{9a.} & \mathsf{r}_\mathsf{N}\,t\,s\,r\,\widetilde{n+1} & \varrho & s\,r\,(\mathsf{r}_\mathsf{N}\,t\,s\,r\,\overline{n}). &
\end{array}
$$

Zudem soll $\tilde{n}$ für alle $n \in I\!N$ nicht zur Interpretation von N gehören.

Da die neuen Terme $\tilde{n}$ nicht zur Sprache $\mathcal{L}_p$ gehören, und dementsprechend BON keine speziellen Axiome über diese Terme beinhaltet, ist mit $\mathcal{CNT}$ auch $\mathcal{CNT}^\star$ ein Modell von BON.

Satz 23 $\mathcal{CNT}^\star \models \mathsf{BON}$.

Wir zeigen nun, daß in $\mathcal{CNT}^\star$ jede Funktion, die Werte in N besitzt und nicht die Identitätsfunktion ist, auch nicht N-strikt ist.

Satz 24 Für jeden geschlossenen $\mathcal{L}_p$-Term t und jede natürliche Zahl m folgt aus $\mathcal{CNT}^\star \models \mathsf{N}(t\,\overline{m}) \wedge t\,\overline{m} \neq \overline{m}$, daß gilt:

$$\mathcal{CNT}^\star \models t\,\overline{m} = t\,\widetilde{m}.$$

Beweis: In diesem Beweis schreiben wir $t \rightarrow_i s$, falls sich der Term t in $\mathcal{CNT}^\star$ in i Schritten modulo ϱ auf s reduziert läßt, $i \in I\!N$. Zudem steht $t\{s/r\}$ für eine *Variante* von t, bei der einige Vorkommnisse von r in t durch s ersetzt wurden.
Nach Voraussetzung gibt es nun natürliche Zahlen m und k, $m \neq k$, so daß gilt

$$\mathcal{CNT}^\star \models t\,\overline{m} = \overline{k}.$$

Nun zeigen wir durch Induktion nach i, daß für alle Terme s und alle Varianten $s\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ gilt:

$$s \rightarrow_i \overline{k} \quad \text{impliziert} \quad \mathcal{CNT}^\star \models s\{\widetilde{m}/\overline{m}\} = \overline{k}.$$

Induktionsanfang: Im Fall $i = 0$ muß s bereits die Gestalt $\overline{k}$ haben. Für $k < m$ ist nichts zu zeigen (da es nichts zu ersetzen gibt), $k = m$ ist nach Voraussetzung ausgeschlossen, es bleibt also der Fall $k > m$, d.h. k hat die Gestalt $\underbrace{\mathsf{s_N}\,(\ldots(\mathsf{s_N}}_{k\,-\,m\text{-mal}}\,\overline{m})\ldots)$.
Dann hat $s\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$, falls es nicht mit s identisch ist, die Gestalt $\underbrace{\mathsf{s_N}\,(\ldots(\mathsf{s_N}}_{k\,-\,m\text{-mal}}\,\widetilde{m})\ldots)$, was sich mit der Reduktionsregel 5a. zu $\underbrace{\mathsf{s_N}\,(\ldots(\mathsf{s_N}}_{k\,-\,m\,-\,1\text{-mal}}\,\overline{m+1})\ldots) \equiv \overline{k}$ reduzieren läßt.

Induktionsschritt: Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle Terme s und Varianten $s\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$:

$$s \rightarrow_i \overline{k} \quad \text{impliziert} \quad s\{\widetilde{m}/\overline{m}\} = \overline{k}.$$

Zu zeigen ist noch, daß für alle Terme r und s und Varianten $r\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ gilt:

$$r \rightarrow_1 s \rightarrow_i \overline{k} \quad \text{impliziert} \quad r\{\widetilde{m}/\overline{m}\} = \overline{k}.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung reicht es zu zeigen, daß es für alle Terme r und s mit $r \rightarrow_1 s$ und alle Varianten $r\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ eine Variante $s\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ gibt mit $r\{\widetilde{m}/\overline{m}\} = s\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$. $r \rightarrow_1 s$ bedeutet, daß es einen Teilterm $\widehat{r}$ von r gibt, so daß $\widehat{r}\ \varrho\ \widehat{s}$ gilt und s der Term r ist, bei dem das erste Vorkommnis von $\widehat{r}$ durch $\widehat{s}$ ersetzt wurde. Mit Ausnahme von 5a. entspricht jeder neuen Reduktionsregel für „Pseudoziffern" eine Reduktionsregel für die echten Ziffern. Dementsprechend ändert sich für eine Variante $t\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$, außer im Fall, daß $\widetilde{n}$ in einem Teilterm $\mathsf{s_N}\,\overline{n}$ ersetzt wird, die Reduktionsstrategie nicht, d.h. die Substitution erhält sowohl die Redexe als auch die normalen Terme. Im genannten Ausnahmefall kann man aber 5a. anwenden und erhält bereits wieder eine (einfachere) Variante $t\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$, welche die Reduktionsstrategie aufrechterhält. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß aus $\widehat{r}\ \varrho\ \widehat{s}$ für jede Variante $\widehat{r}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ ein Term $\widehat{s}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ mit $\widehat{r}\{\widetilde{m}/\overline{m}\} = \widehat{s}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ existiert.

Diese Aussage zeigen wir mit Fallunterscheidung nach $\widehat{r}\ \varrho\ \widehat{s}$.

1. $\widehat{r} \equiv \mathsf{k}\, r_0\, r_1\ \varrho\ r_0 \equiv \widehat{s}$.

   Dann gilt $\widehat{r}\{\widetilde{m}/\overline{m}\} \equiv \mathsf{k}\, r_0\{\widetilde{m}/\overline{m}\}\, r_1\{\widetilde{m}/\overline{m}\} \to_l r_0\{\widetilde{m}/\overline{m}\} \equiv \widehat{s}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ (wobei $l > 1$ gilt, falls der oben skizzierte Fall eintritt, daß erst noch mittels 5a. Teilterme reduziert wurden).

2.–4. $\widehat{r} \equiv \mathsf{s}\, r_0\, r_1\, r_2$, $\widehat{r} \equiv \mathsf{p}_0\, (\mathsf{p}\, r_0\, r_1)$ und $\widehat{r} \equiv \mathsf{p}_1\, (\mathsf{p}\, r_0\, r_1)$ sind analoge Fälle.

5. $\widehat{r} \equiv \mathsf{p_N}\, (\mathsf{s_N}\, \overline{l})\ \varrho\ \overline{l} \equiv \widehat{s}$.

   Wir können $m \leq l+1$ voraussetzen, sonst ist nichts zu zeigen.

   5a. Für $m < l+1$ kann die Variante $\widehat{r}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$, außer $\widehat{r}$ selbst, nur die Gestalt $\mathsf{p_N}\ \underbrace{(\mathsf{s_N}\ \ldots\ (\mathsf{s_N}}_{l+1-m\text{-mal}}\ \widetilde{m})\ldots)$ haben. Mit der Reduktionsklausel 5a. erhalten wir $\widehat{r}\{\widetilde{m}/\overline{m}\} \to_1 \mathsf{p_N}\ \underbrace{(\mathsf{s_N}\ \ldots\ (\mathsf{s_N}}_{l-m\text{-mal}}\ \overline{m+1})\ldots) \equiv \mathsf{p_N}\, (\mathsf{s_N}\, \overline{l})\ \varrho\ \overline{l} \equiv \widehat{s}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$.

   5b. Für $m = l+1$ kann $\widehat{r}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ außer $\widehat{r}$ selbst nur die Gestalt $\mathsf{p_N}\, \overline{m}$ haben. Dann ergibt sich mit der Reduktionsklausel 5b. $\mathsf{p_N}\, \overline{m} \to_1 \overline{l} \equiv \widehat{s}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$.

6.–7. $\widehat{r} \equiv \mathsf{d_N}\, r_0\, r_1\, \overline{l_1}\, \overline{l_2}$.

   Wir betrachten beispielhaft den Fall $l_1 = m$, $l_2 > m$. Die anderen Fälle lassen sich analog zeigen.

   Eine Variante $\widehat{r}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ kann nun eine der folgenden Formen haben:

   1. $\mathsf{d_N}\, r_0\{\widetilde{m}/\overline{m}\}\, r_1\{\widetilde{m}/\overline{m}\}\, \overline{m}\, l_2$,
   2. $\mathsf{d_N}\, r_0\{\widetilde{m}/\overline{m}\}\, r_1\{\widetilde{m}/\overline{m}\}\, \widetilde{m}\, l_2$,
   3. $\mathsf{d_N}\, r_0\{\widetilde{m}/\overline{m}\}\, r_1\{\widetilde{m}/\overline{m}\}\, \overline{m}\, (\underbrace{\mathsf{s_N}(\ldots(\mathsf{s_N}}_{l_2-n\text{-mal}}\ \widetilde{m})\ldots))$,
   4. $\mathsf{d_N}\, r_0\{\widetilde{m}/\overline{m}\}\, r_1\{\widetilde{m}/\overline{m}\}\, \widetilde{m}\, (\underbrace{\mathsf{s_N}(\ldots(\mathsf{s_N}}_{l_2-n\text{-mal}}\ \widetilde{m})\ldots))$.

   Mit einer Anwendung von 5a. lassen sich die beiden letzten Fälle auf die beiden ersten zurückführen. Diese wiederum lassen sich mit 7. bzw. 7b. auf $r_1\{\widetilde{m}/\overline{m}\} \equiv \widehat{s}\{\widetilde{m}/\overline{m}\}$ reduzieren.

8.–9. $\widehat{r} \equiv \mathsf{r_N}\, r_0\, r_1\, r_2\, \overline{l}$. Beide möglichen Fälle lassen sich mit den Reduktionsklauseln 8a. und 9a. analog zu $\mathsf{d_N}$ bewiesen. □

Nach Bemerkung 11 würden uns Terme $\mathsf{sd_N}$ und $\mathsf{and_N}$ mit $\mathsf{sd_N}\,x = 0 \leftrightarrow \mathsf{N}(x)$ und $\mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y) \leftrightarrow \mathsf{N}(\mathsf{and_N}\,x\,y)$ genügen, um eine Äquivalenz von (O-$\mathrm{I_N}$) und (N-$\mathrm{I_N}$) in BON zu zeigen. Satz 24 liefert aber als einfache Folgerung, daß solche Terme in BON nicht definierbar sind.

Satz 25 Es gibt *keinen* $\mathcal{L}_p$-Term $\mathsf{sd_N}$, für den BON beweist:

$$\forall x.\mathsf{sd_N}\,x = 0 \leftrightarrow \mathsf{N}(x).$$

Beweis: Angenommen, es gäbe einen Term $\mathsf{sd_N}$, für den sich in BON $\mathsf{sd_N}\,x = 0 \leftrightarrow \mathsf{N}(x)$ beweisen ließe. Dann würde insbesondere $\mathsf{sd_N}\,1 = 0$ gelten und nach dem vorhergehenden Satz würde in $\mathcal{CNT}^\star$ $\mathsf{sd_N}\,\tilde{1} = \mathsf{sd_N}\,1 = 0$ gelten. Da aber $\tilde{1}$ nicht zur Interpretation von N gehört, widerspricht das der Annahme. □

Satz 26 Es gibt *keinen* $\mathcal{L}_p$-Term $\mathsf{and_N}$, für den BON beweist:

$$\forall x, y.\mathsf{N}(\mathsf{and_N}\,x\,y) \leftrightarrow \mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y).$$

Beweis: Angenommen, es gäbe einen Term $\mathsf{and_N}$, so daß in BON die Äquivalenz $\mathsf{N}(\mathsf{and_N}\,x\,y) \leftrightarrow \mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y)$ beweisbar wäre. Dann folgt mit (der Kontraposition von) Satz 24, daß sowohl $\lambda x.\mathsf{and_N}\,0\,x$ als auch $\lambda x.\mathsf{and_N}\,x\,1$ die Identitätsfunktion auf N sein muß. Damit erhalten wir $1 = (\lambda x.\mathsf{and_N}\,0\,x)\,1 = \mathsf{and_N}\,0\,1 = (\lambda x.\mathsf{and_N}\,x\,1)\,0 = 0$, womit die Annahme widerlegt ist. □

1.2.2 N-strikte Fallunterscheidung

Um N-strikte Terme in BON einzuführen, kann man die Theorie um das folgende Axiom erweitern, das besagt, daß die Fallunterscheidung N-strikt in den beiden letzten Argumenten ist.

$$\text{(N-Str)} \qquad \forall x, y, v, w.\mathsf{N}(\mathsf{d_N}\,x\,y\,v\,w) \rightarrow \mathsf{N}(v) \wedge \mathsf{N}(w).$$

Man kann sich leicht überlegen, daß dieses Axiom in den üblichen Modellen von BON und TON erfüllt ist (bzw. durch geringfügige Modifikationen erfüllt werden kann). Insbesondere ist es in rekursionstheoretischen Modellen trivial erfüllt und folgt in Termmodellen, solange Reduktionsregeln für $\mathsf{d_N}$ nur mit Numeralen an der dritten und vierten Argumentstelle definiert werden.

Das Axiom (N-Str) ist eine natürliche Forderung an $\mathsf{d_N}$, wenn man die Fallunterscheidung *auf* N betont. Demnach sollte $\mathsf{d_N}\,x\,y\,v\,w$ ein Term ohne spezielle Bedeutung sein, falls v oder w nicht zu N gehört. Mit Rücksicht auf die totalen Modelle können wir nicht $\neg\,\mathsf{d_N}\,x\,y\,v\,w\downarrow$ fordern. Da es zudem keinen naheliegenden Term außerhalb von N gibt, den man als ausgezeichnet betrachten könnte, ist $\neg\mathsf{N}(\mathsf{d_N}\,x\,y\,v\,w)$ die einzige Möglichkeit „Bedeutungslosigkeit“ auszudrücken, was exakt durch die Kontraposition von (N-Str) ausgedrückt wird:

$$\forall x, y, v, w.\neg\mathsf{N}(v) \vee \neg\mathsf{N}(w) \rightarrow \neg\mathsf{N}(\mathsf{d_N}\,x\,y\,v\,w).$$

1.2.3 Schwache Induktionen in $\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-Str})$

In $\mathsf{BON}+(\mathsf{N}\text{-Str})$ können wir mit Hilfe von $\mathsf{d_N}$ einen Semientscheider für N definieren.

Lemma 27 Es gibt einen $\mathcal{L}_p$-Term $\mathsf{sd_N}$, so daß gilt:

$$\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-Str}) \vdash \forall x. \mathsf{sd_N}\, x = 0 \leftrightarrow \mathsf{N}(x).$$

Beweis: Man setzt $\mathsf{sd_N}$ gleich $\lambda x. \mathsf{d_N}\, 0\, 1\, x\, x$. □

Bemerkung 28 Da die totalen Versionen von BON inkonsistent mit entscheidbaren natürlichen Zahlen sind [Str96b, Abs. 1.2.2], können wir für $x \notin \mathsf{N}$ nicht $\mathsf{sd_N}\, x = 1$ verlangen. Aus diesem Grund ist $\mathsf{sd_N}$ nur ein *Semi*entscheider für N.

Nun läßt sich $f\, x \in \mathsf{N}$ durch $(\lambda y. \mathsf{sd_N}\, (f\, y))\, x = 0$ ausdrücken und wir erhalten:

Satz 29 $\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\mathrm{O}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N}) \vdash (\mathsf{N}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})$.

Für die Gegenrichtung benutzen wir Lemma 9, mit dessen Hilfe sich $t = 0$ durch eine Konjunktion von zwei Aussagen über N ausdrücken läßt. Nun zeigen wir, daß $(\mathsf{N}\text{-Str})$ erlaubt, eine solche Konjunktion durch eine einzige Aussage über N zu ersetzen.

Lemma 30 Es gibt einen $\mathcal{L}_p$-Term $\mathsf{and_N}$, so daß gilt:

$$\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-Str}) \vdash \forall x, y. \mathsf{N}(\mathsf{and_N}\, x\, y) \leftrightarrow \mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y).$$

Beweis: Man setzt $\mathsf{and_N}$ gleich $\lambda x, y. \mathsf{d_N}\, 0\, 0\, x\, y$. □

Nach Lemma 9 kann man also $\mathsf{N}((\lambda y. \mathsf{and_N}\, (f\, y)\, (\mathsf{d_N}\, (\lambda z.0)\, (\lambda z. \mathsf{not_N})\, (f\, y)\, 0\, 0))\, x)$ für $f\, x = 0$ schreiben, und wir erhalten die Umkehrung von Satz 29.

Satz 31 $\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\mathsf{N}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N}) \vdash (\mathrm{O}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})$.

Die Sätze 29 und 31 ergeben zusammen:

Theorem 32 In $\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-Str})$ sind $(\mathrm{O}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})$ und $(\mathsf{N}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})$ äquivalent.

Bemerkung 33 Da sich $(\mathsf{N}\text{-Str})$ in allen Modellen, die bei den beweistheoretischen Analysen von BON und TON formalisiert wurden, modellieren läßt, ändern sich die beweistheoretischen Stärken von BON und TON in Theorem 20 bei Hinzunahme von N-Striktheit nicht.

1.2.4 Weitere Anwendungen der N-Striktheit

Bei Hinzunahme von (N-Str) läßt sich der übliche Begriff von Repräsentierbarkeit zahlentheoretischer Funktionen in folgender Weise verstärken:

Definition 34 Ein geschlossener Term t_F *repräsentiert* eine zahlentheoretische Funktion $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *stark* (in einer Theorie $\mathcal{T}$), wenn gilt:

1. t_F ist N-strikt (in $\mathcal{T}$), und

2. t_F *repräsentiert* F *beweisbar* in $\mathcal{T}$, d.h.

   (a) für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt

   $$F(m_1, \ldots, m_k) = n \Leftrightarrow \mathcal{T} \vdash t_F\, \overline{m_1} \ldots \overline{m_k} = \overline{n},$$

   (b) $\mathcal{T} \vdash (t_F : \mathsf{N}^k \to \mathsf{N})$.

Zum Beweis, daß beweisbar repräsentierbare Funktionen in Theorien mit (N-Str) auch stark repräsentierbar sind, führen wir zuerst einen Term $\mathsf{if_N}$ ein, der den für die N-Striktheit notwendigen „Typcheck" eines Arguments durchführt.

Lemma 35 Es gibt einen $\mathcal{L}_p$-Term $\mathsf{if_N}$, so daß gilt:

$$\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-Str}) \vdash (\mathsf{N}(\mathsf{if_N}\, x\, y) \to \mathsf{N}(x)) \wedge (\mathsf{N}(x) \to \mathsf{if_N}\, x\, y = y).$$

Beweis: Man setzt $\mathsf{if_N}$ gleich $\lambda x, y.\mathsf{d_N}\, y\, 0\, x\, x$. □

Der Term $\mathsf{if_N}$ erlaubt bei Funktionen, die Werte in N liefern, sicherzustellen, daß ein Argument bereits zu N gehört. So läßt sich beispielsweise ein N-strikter Nachfolger $\widehat{\mathsf{s_N}}$ mit $\mathsf{N}(x) \to \widehat{\mathsf{s_N}}\, x = \mathsf{s_N}\, x$ und $\mathsf{N}(\widehat{\mathsf{s_N}}\, x) \to \mathsf{N}(x)$ durch $\lambda x.\mathsf{if_N}\, x\, (\mathsf{s_N}\, x)$ definieren. Durch iterierte Anwendung von $\mathsf{if_N}$ kann man die N-Striktheit auch für mehrstellige Funktionen erzwingen. Insbesondere lassen sich mit (N-Str) alle beweisbar repräsentierbaren Funktionen einer applikativen Theorie dann auch stark repräsentieren:

Satz 36 Repräsentiert t_F in $\mathcal{T}$ beweisbar die Funktion $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, dann wird F durch

$$\lambda x_1 \ldots . \lambda x_k.\mathsf{if_N}\, x_1\, (\ldots (\mathsf{if_N}\, x_k\, (t_F\, x_1\, \ldots\, x_k)) \cdots)$$

in $\mathcal{T} + (\mathsf{N}\text{-Str})$ stark repräsentiert.

Dieser Satz liefert einen weiteren Beweis für die Lemmata 27 und 30, wenn wir für $\mathsf{sd_N}$ und $\mathsf{and_N}$ stark repräsentierende Terme der konstanten Null-Funktion und einer beliebigen zweistelligen primitiv-rekursiven Funktion wählen. Ebenso ist ein starker Repräsentant der zahlentheoretischen Nachfolgerfunktion bereits eine N-strikte Nachfolgerfunktion.

Bemerkung 37 Als eine direkte Konsequenz von Theorem 32 ergibt sich, daß wir in $\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\text{O-I}_\mathsf{N})$ auf die Konstante $\mathsf{r_N}$ verzichten können. In $\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-I}_\mathsf{N})$ lassen sich die primitiv-rekursiven Funktionen ohne Verwendung von $\mathsf{r_N}$ beweisbar repräsentieren (s. [Str92, Abs. 2.3]). Für $\mathsf{BON} + (\text{O-I}_\mathsf{N})$ ist ein entsprechendes Resultat nicht bekannt, und daher wird die explizite Axiomatisierung von $\mathsf{r_N}$ benötigt. Mit der Äquivalenz von $(\mathsf{N}\text{-I}_\mathsf{N})$ und (O-I_N) in $\mathsf{BON} + (\mathsf{N}\text{-Str})$ läßt sich $\mathsf{r_N}$ auch mit (O-I_N) definieren.

Weitere zentrale Anwendungen von $(\mathsf{N}\text{-Str})$ ergeben sich im Zusammenhang mit den Quantifikationsoperatoren, die wir in Abschnitt 1.3 untersuchen werden.

1.2.5 Alternative Verstärkungen

Aus Uniformitätsgründen wäre es naheliegend, auch für die anderen Konstanten von $\mathcal{L}_p$, welche Argumente aus N besitzen, die N-Striktheit axiomatisch zu fordern, d.h. für $\mathsf{s_N}, \mathsf{p_N}$ und $\mathsf{r_N}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{N}(\mathsf{s_N}\,x) &\rightarrow \mathsf{N}(x), \\ \mathsf{N}(\mathsf{p_N}\,x) &\rightarrow \mathsf{N}(x), \\ \mathsf{N}(\mathsf{r_N}\,f\,g\,x\,y) &\rightarrow \mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y). \end{aligned}$$

Allerdings lassen sich Terme mit diesen Eigenschaften mit Hilfe von $\mathsf{if_N}$ definieren (s. Lemma 35).

Bemerkung 38 Bei $\mathsf{r_N}$ könnte man auch in Versuchung kommen, eine gewisse Form von $(\mathsf{N} \rightarrow \mathsf{N})$- und $(\mathsf{N}^3 \rightarrow \mathsf{N})$-Striktheit zu fordern, d.h.

$$\mathsf{N}(\mathsf{r_N}\,f\,g\,x\,y) \rightarrow (f : \mathsf{N} \rightarrow \mathsf{N}) \wedge (g : \mathsf{N}^3 \rightarrow \mathsf{N}).$$

Das würde aber erlauben, eine Funktion f auf die Eigenschaft zu testen, total im Sinne von $\mathsf{N} \rightarrow \mathsf{N}$ zu sein. Derartige Tests spielen im Zusammenhang mit den Quantifikationsoperatoren, die im nächsten Abschnitt behandelt werden, eine große Rolle, würden BON aber bereits erheblich verstärken. Dementsprechend läßt sich ein derartig verstärktes $\mathsf{r_N}$ auch nicht mit Hilfe von $(\mathsf{N}\text{-Str})$ definieren.

Will man die Bedeutung von $\mathsf{d_N}$ nicht durch die Hinzunahme von $(\mathsf{N}\text{-Str})$ einschränken, können wir auch $\mathsf{if_N}$ als neue Konstante zu $\mathcal{L}_p$ hinzunehmen. Damit läßt sich N-Striktheit für $\mathsf{if_N}$ formulieren:

$$(\mathsf{N}\text{-Str'}) \qquad \forall x, y.(\mathsf{N}(\mathsf{if_N}\,x\,y) \rightarrow \mathsf{N}(x)) \wedge (\mathsf{N}(x) \rightarrow \mathsf{if_N}\,x\,y = y).$$

Es läßt sich jetzt zeigen, daß $(\mathsf{N}\text{-Str})$ und $(\mathsf{N}\text{-Str'})$ in BON, erweitert um die Konstante $\mathsf{if_N}$, äquivalent sind in dem Sinne, daß sich jeweils Konstanten definieren lassen, die die entsprechenden Eigenschaften haben (offensichtlich folgt aus $(\mathsf{N}\text{-Str'})$ nicht $(\mathsf{N}\text{-Str})$ für die ursprüngliche Konstante $\mathsf{d_N}$).

Lemma 39 In BON mit der Konstante $\mathsf{if_N}$ sind (N-Str) und (N-Str') äquivalent.

Beweis: Daß (N-Str') aus (N-Str) folgt, ergibt sich aus Lemma 35. Für die andere Richtung setzen wir $\mathsf{d}'_\mathsf{N} :\equiv \lambda u, v, x, y.\mathsf{if_N}\, x\, (\mathsf{if_N}\, y\, (\mathsf{d_N}\, u\, v\, x\, y))$, und es läßt sich leicht nachrechnen, daß d'_N die Axiome von $\mathsf{d_N}$ und (N-Str) erfüllt. □

Anders als für $\mathsf{if_N}$ ist nicht zu sehen, wie man generelle N-Striktheit mit Hilfe von $\mathsf{sd_N}$, $\mathsf{and_N}$ oder sogar nur einem N-strikten $\mathsf{s_N}$ bekommen könnte. Mehr noch scheinen sich diese drei Terme auch nicht gegenseitig in irgendeiner Kombination definieren zu lassen.

1.3 Quantifikationsoperatoren

Gegenstand dieses Abschnitts sind die logischen Zusammenhänge von drei unterschiedlichen Quantifikationsoperatoren, μ, E und $\mathsf{E}^\#$. Derartige Operatoren sind aus der höheren Rekursionstheorie gut bekannt (s. [KM77, § 5]) und sollen nun im Kontext applikativer Theorien behandelt werden.

Unter *totalen Funktionen* verstehen wir im folgenden diejenigen Objekte t, für welche die jeweilige Theorie $(t : \mathsf{N} \to \mathsf{N})$ beweist.

1.3.1 μ, E und $\mathsf{E}^\#$

Der nichtkonstruktive μ-Operator erlaubt es, eine Nullstelle einer totalen Funktion f zu bestimmen. Ausgehend von Ergebnissen in [Fef85] ist er von Feferman und Jäger im Zusammenhang mit BON in [FJ93, FJ96] ausführlich diskutiert worden. Für die schwachen Induktionen wurde er in der hier zugrundegelegten, leicht verstärkten Form, die auch einen Test auf Totalität von Funktionen erlaubt, von Jäger und Strahm in [JS96] behandelt.

(μ.1) $\quad (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \leftrightarrow \mathsf{N}(\mu\, f)$,

(μ.2) $\quad (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \wedge (\exists x : \mathsf{N}. f\, x = 0) \to f\,(\mu\, f) = 0$.

E erlaubt nur den Test auf die Existenz einer Nullstelle einer totalen Funktion, ohne daß man eine spezielle Nullstelle zurückgeliefert bekommt. Diese Form eines Quantifikationsoperators (ohne Totalitätstest) legte Feferman seiner Theorie T_1 [Fef75, Fef79] zugrunde. Wir axiomatisieren auch E mit einem Totalitätstest für Funktionen.

(E.1) $\quad (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \leftrightarrow \mathsf{N}(\mathsf{E}\, f)$,

(E.2) $\quad (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \to ((\exists x : \mathsf{N}. f\, x = 0) \leftrightarrow \mathsf{E}\, f = 0)$.

Bei $\mathsf{E}^\#$ verzichtet man gegenüber E auf die Forderung nach Totalität beim Test auf die Nullstelle. Falls die Funktion keine Nullstelle besitzt, liefert $\mathsf{E}^\#$ aber nur ein Element aus N, falls die Funktion total ist. Existiert allerdings eine Nullstelle, erlaubt $\mathsf{E}^\#$ keinen unmittelbaren Test auf Totalität mehr.

($\mathsf{E}^\#$.1) $\quad \mathsf{E}^\# f = 0 \leftrightarrow \exists x : \mathsf{N}.f\,x = 0,$

($\mathsf{E}^\#$.2) $\quad \mathsf{E}^\# f = 1 \leftrightarrow \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{N}(f\,x) \wedge f\,x \neq 0,$

($\mathsf{E}^\#$.3) $\quad \neg\mathsf{N}(\mathsf{E}^\# f) \leftrightarrow (\forall x : \mathsf{N}.\neg f\,x = 0) \wedge \exists x : \mathsf{N}.\neg\mathsf{N}(f\,x).$

Mit $\mathsf{BON}(\mu)$, $\mathsf{BON}(\mathsf{E})$ bzw. $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^\#)$ bezeichnen wir die Theorie BON erweitert um die Axiome $(\mu.1) + (\mu.2)$, $(\mathsf{E}.1) + (\mathsf{E}.2)$ bzw. $(\mathsf{E}^\#.1) + (\mathsf{E}^\#.2) + (\mathsf{E}^\#.3)$.

1.3.2 Modelle

Wir stellen hier nur kurz das rekursionstheoretische Modell vor, wie es von Feferman und Jäger in [FJ93] für den μ-Operator (in leicht abgeschwächter Form) ausgeführt ist, und geben die nötigen Modifikationen für die hier behandelten Operatoren an.

Die zentrale Idee für dieses Modell besteht darin, die Applikationsrelation $x\,y \simeq z$ durch einen Fixpunkt App einer geeigneten induktiven Operatorform $A(P, x, y, z)$ zu interpretieren. Diese Operatorform läßt sich in einer passenden Ordinalzahltheorie über PA [Jäg93] formalisieren, mit deren Hilfe auch die beweistheoretischen oberen Schranken bestimmt werden [FJ93].

$A(P, x, y, z)$ umfaßt die üblichen Abschlußbedingungen für die Kombinatoren von $\mathcal{L}_p$ [FJ93, S. 258f], z.B. für den $\mathsf{s_N}$-Kombinator

(5) $\;x = \widehat{\mathsf{s_N}} \wedge z = y + 1.$

Für den (leicht verstärkten) μ-Operator müssen die Klauseln (21) und (22) wie folgt lauten:

(21) $\;x = \widehat{\mu} \wedge \forall v.\exists w.w \neq 0 \wedge P(y, v, w) \wedge z = 0,$

(22) $\;x = \widehat{\mu} \wedge P(y, z, 0) \wedge \forall v.\exists w.P(y, v, w) \wedge (v < z \rightarrow w \neq 0).$

Für E ersetzt man diese durch

(21) $\;x = \widehat{\mathsf{E}} \wedge \forall v.\exists w.w \neq 0 \wedge P(y, v, w) \wedge z = 1,$

(22) $\;x = \widehat{\mathsf{E}} \wedge (\forall v.\exists w.P(y, v, w)) \wedge (\exists v.P(y, v, 0)) \wedge z = 0.$

Für $\mathsf{E}^\#$ wählt man als Klauseln:

(21) $\;x = \widehat{\mathsf{E}^\#} \wedge \forall v.\exists w.w \neq 0 \wedge P(y, v, w) \wedge z = 1,$

(22) $\;x = \widehat{\mathsf{E}^\#} \wedge \exists v.P(y, v, 0) \wedge z = 0.$

Man kann sich nun leicht überlegen, daß die Fixpunkte dieser Operatorformen die Applikation richtig interpretieren, und daß die Formalisierung des Modells in [FJ93] auch für die modifizierten Operatoren durchgeht.

Eine Erweiterung des totalen Termmodells auf μ findet sich in [JS95]. Auch in diesem Fall lassen sich die Modifikationen für E und $\mathsf{E}^{\#}$ problemlos vornehmen.

1.3.3 Logische Beziehungen

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, inwieweit sich μ, E und $\mathsf{E}^{\#}$ wechselseitig definieren lassen. Dabei stellt sich heraus, daß wir lediglich E ohne weiteres mit Hilfe von μ definieren können. Um μ aus E zu bekommen, benötigen wir sowohl N-Striktheit als auch Formelinduktion. Da $\mathsf{E}^{\#}$ auch auf partiellen Funktionen operiert, kann man es sicher nicht mit Hilfe von μ oder E definieren, umgekehrt braucht man für den Totalitätstest aber auch (N-Str), um E aus $\mathsf{E}^{\#}$ zu bekommen, und zusätzlich wieder Formelinduktion, um μ zu definieren.

Abschließend zeigen wir, daß sich sd_N und and_N in $\mathsf{BON}(\mathsf{E})$ bereits ohne N-Striktheit definieren lassen, so daß (O-I_N) und (N-I_N) in $\mathsf{BON}(\mathsf{E})$ und $\mathsf{BON}(\mu)$ äquivalent sind.

Satz 40 Es gibt einen $\mathcal{L}_\mu$-Term E_μ, so daß gilt:

1. $\mathsf{BON}(\mu) \vdash (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \leftrightarrow \mathsf{N}(\mathsf{E}_\mu\, f)$,
2. $\mathsf{BON}(\mu) \vdash (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \to ((\exists x : \mathsf{N}.f\, x = 0) \leftrightarrow \mathsf{E}_\mu\, f = 0)$.

Beweis: Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\mu \quad :\equiv \quad & \lambda f.\mu\,(\lambda x.\mathsf{d}_\mathsf{N}\,(f\,(\mu\, f))\\ & \qquad\qquad (\mathsf{d}_\mathsf{N}\,(\mathsf{d}_\mathsf{N}\,1\,0\,(f\,(\mu\, f))\,0)\\ & \qquad\qquad\qquad (\mu\,(\lambda y.\mathsf{d}_\mathsf{N}\,1\,(\mathsf{d}_\mathsf{N}\,0\,(\mu\, f)\,y\,1)\,y\,0))\\ & \qquad\qquad\qquad x\,1)\\ & \qquad\qquad x\,0).\end{aligned}$$

Etwas lesbarer läßt sich E_μ schreiben als $\lambda f.\mu\,(\lambda x.g\,f\,x)$ mit

$$g\,f\,x :\equiv \begin{cases} f\,(\mu\, f), & \text{falls } x = 0,\\ \mathsf{d}_\mathsf{N}\,1\,0\,(f\,(\mu\, f))\,0, & \text{falls } x = 1,\\ \mu\,(\lambda y.h\,f\,y), & \text{falls } x > 1,\end{cases}$$

wobei

$$h\,f\,y :\equiv \begin{cases} 1, & \text{falls } y = 0,\\ 0, & \text{falls } y = 1,\\ \mu\, f, & \text{falls } y > 1.\end{cases}$$

Die Idee bei der Konstruktion von E_μ ist es, zu einer Funktion f eine neue Funktion $g\,f$ zu definieren, die total ist, falls f total ist, und die, falls f eine Nullstelle besitzt, genau eine Nullstelle an der Stelle 0 besitzt. Aus der ersten Zeile der Definition von $g\,f$ ergibt sich, daß 0 in diesem Fall eine Nullstelle ist. Es ist auch die einzige, was durch die geeignete Definition von h, das auch den Totalitätstest von $g\,f$ auf f überträgt, sichergestellt wird. Besitzt f keine Nullstelle, muß $g\,f$ wenigstens eine Nullstelle ungleich 0 besitzen, was durch die zweite Zeile von $g\,f$ garantiert ist.

Konkret folgt aus $(f : \mathsf{N} \to \mathsf{N})$ mit $(\mu.1)$ sofort $(g\,f : \mathsf{N} \to \mathsf{N})$ und weiter $\mathsf{N}(\mathsf{E}_\mu\, f)$. Für die umgekehrte Richtung nehmen wir $\mathsf{N}(\mathsf{E}_\mu\, f)$ an, d.h. $\mathsf{N}(\mu\,(\lambda x.g\,f\,x))$, was $((\lambda x.g\,f\,x) : \mathsf{N} \to \mathsf{N})$ liefert. Also gilt $\mathsf{N}(g\,f\,2)$, d.h. $\mathsf{N}(\mu\,(\lambda y.h\,f\,y))$. Daraus folgt mit $(\mu.1)$, daß auch $(\lambda y.h\,f\,y)$ total ist, im speziellen $\mathsf{N}(h\,f\,2)$. Damit haben wir $\mathsf{N}(\mu\,f)$, woraus schließlich $(f : \mathsf{N} \to \mathsf{N})$ folgt.

Für die zweite Behauptung können wir die Totalität von f voraussetzen. Gelte zuerst $(\exists x : \mathsf{N}.f\,x = 0)$, dann folgt mit $(\mu.2)$, daß $f\,(\mu\,f) = 0$ ist, also auch $g\,f\,0 = 0$. Jetzt muß noch gezeigt werden, daß 0 die einzige Nullstelle von g ist. Da $g\,1$ gleich 1 ist, bleibt zu zeigen: $\mu\,(\lambda y.h\,f\,y) \neq 0$. Das folgt aber, da wir mit dem Beweis der ersten Aussage schon wissen, daß $\lambda y.h\,f\,y$ total ist, und wegen $h\,f\,0 = 1$ und $h\,f\,1 = 0$ kann $\mu\,(\lambda y.h\,f\,y)$ nicht gleich 0 sein.

Für die andere Richtung nutzen wir aus, daß mit f auch $\lambda x.g\,f\,x$ total ist und auch mindestens eine Nullstelle besitzt: Mit $\mathsf{N}(f\,(\mu\,f))$ folgt im Fall $f\,(\mu\,f) = 0$, daß $g\,f\,0 = 0$ ist, und im Fall $f\,(\mu\,f) \neq 0$, daß $g\,f\,1 = \mathsf{d_N}\,1\,0\,(f\,(\mu\,f))\,0 = 0$ ist. Nehmen wir nun $\mathsf{E}_\mu\, f = 0$ an, gilt $\mu\,(\lambda x.g\,f\,x) = 0$ und damit nach $(\mu.2)$

$$0 = g\,f\,(\mu\,(\lambda x.g\,f\,x)) = g\,f\,0 = f\,(\mu\,f).$$

Also hat auch f eine Nullstelle. □

Die Definition von E_μ profitiert von dem zwar nicht willkürlichen, aber auch nicht zwingenden Umstand, daß $\mathsf{E}\,f$ nach Axiom $(\mathsf{E}.2)$ bei der Existenz einer Nullstelle den Wert 0 liefert. Würde man in diesem Axiom 1 als ausgezeichneten Wert wählen, wäre eine analoge Definition von E mittels μ nur mit N-Striktheit möglich. Um auch „Einsstellen“ einer Funktion f zu bestimmen, kann man μ zwar auf $\lambda x.\mathsf{d_N}\,0\,1\,(f\,x)\,1$ anwenden, aber ohne (N-Str) kann man in diesem Fall nicht mehr die Totalität von f testen.

Um nun umgekehrt μ mit Hilfe von E zu definieren, brauchen wir bereits N-Striktheit und Formelinduktion. N-Striktheit ist nötig, um nicht den Totalitätstest zu verlieren, Formelinduktion, um mit Hilfe von μ_{rec} eine Nullstelle zu finden, für die E noch keine Schranke liefert.

Satz 41 Es gibt einen $\mathcal{L}_{\mathsf{E}}$-Term μ_{E}, so daß gilt:

1. $\mathsf{BON(E)} + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}}) \vdash (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \leftrightarrow \mathsf{N}(\mu_{\mathsf{E}}\, f)$,

2. $\mathsf{BON(E)} + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}}) \vdash (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \wedge (\exists x \in \mathsf{N}.f\,x = 0) \to f\,(\mu_{\mathsf{E}}\, f) = 0$.

Beweis: Wir setzen

$$\mu_{\mathsf{E}} :\equiv \lambda f.\mathsf{if_N}\,(\mathsf{E}\,f)\,(\mathsf{d_N}\,(\lambda x.\mu_{\mathsf{rec}}\,f)\,(\lambda x.0)\,(\mathsf{E}\,f)\,0\,0).$$

Aus $\mathsf{N}(\mu_{\mathsf{E}}\, f)$ folgt $\mathsf{N}(\mathsf{E}\, f)$ und damit $(f : \mathsf{N} \to \mathsf{N})$.

Für die Gegenrichtung erhalten wir aus $(f : \mathsf{N} \to \mathsf{N})$ umgekehrt $\mathsf{N}(\mathsf{E}\, f)$. Falls $\mathsf{E}\, f \neq 0$ ist, folgt weiter $\mu_{\mathsf{E}}\, f = 0$. Im Fall $\mathsf{E}\, f = 0$ ist $\mu_{\mathsf{E}}\, f = \mu_{\mathsf{rec}}\, f$, doch da in diesem Fall f eine Nullstelle in N besitzt, wird diese nach Satz 12 auch von $\mu_{\mathsf{rec}}\, f$ zurückgeliefert (wofür allerdings Formelinduktion nötig ist). Damit ist auch gleich die zweite Behauptung bewiesen. □

Um E aus $\mathsf{E}^{\#}$ zu definieren, muß man im wesentlichen den Totalitätstest sicherstellen, auch dann, wenn eine Funktion f eine Nullstelle besitzt. Die naheliegende Idee ist nun, neben f auch die Funktion $\lambda x.\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\,(f\, x)$ auf Totalität zu testen. So definiert, erlaubt die Funktion aber wegen der fehlenden N-Striktheit von s_{N} noch keinen Rückschluß auf $f\, x$, und wir benötigen (N-Str) sowohl zur Definition einer passenden Funktion, die den Rückschluß ermöglicht, als auch für die Kombination dieser Funktion mit f selbst.

Satz 42 Es gibt einen $\mathcal{L}_{\mathsf{E}^{\#}}$-Term $\mathsf{E}_{\mathsf{E}^{\#}}$, so daß gilt:

1. $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + (\mathsf{N}\text{-Str}) \vdash (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \leftrightarrow \mathsf{N}(\mathsf{E}_{\mathsf{E}^{\#}}\, f)$,
2. $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + (\mathsf{N}\text{-Str}) \vdash (f : \mathsf{N} \to \mathsf{N}) \to ((\exists x \in \mathsf{N}.f\, x = 0) \leftrightarrow \mathsf{E}_{\mathsf{E}^{\#}}\, f = 0)$.

Beweis: Wir setzen

$$\mathsf{E}_{\mathsf{E}^{\#}} :\equiv \lambda f.\mathsf{if}_{\mathsf{N}}\,(\mathsf{E}^{\#}\,(\lambda x.\mathsf{if}_{\mathsf{N}}\,(f\, x)\,(\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\,(f\, x))))\,(\mathsf{E}^{\#}\, f).$$

Aus $\mathsf{N}(\mathsf{E}_{\mathsf{E}^{\#}}\, f)$ folgt $\mathsf{N}(\mathsf{E}^{\#}\,(\lambda x.\mathsf{if}_{\mathsf{N}}\,(f\, x)\,(\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\,(f\, x))))$. Nach den Axiomen von $\mathsf{E}^{\#}$ muß dieser Term 0 oder 1 sein. Wäre er nun gleich 0, würde $\exists x : \mathsf{N}.\mathsf{if}_{\mathsf{N}}\,(f\, x)\,(\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\,(f\, x)) = 0$ folgen und mit den Eigenschaften von if_{N} auch $\mathsf{N}(f\, x)$ und weiter $\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\,(f\, x) = 0$, was einen Widerspruch liefert. Demnach gilt $\mathsf{E}^{\#}\,(\lambda x.\mathsf{if}_{\mathsf{N}}\,(f\, x)\,(\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\,(f\, x))) = 1$, d.h. die Funktion $\lambda x.\mathsf{if}_{\mathsf{N}}\,(f\, x)\,(\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\,(f\, x))$ ist total. Insbesondere gilt, daß für alle x aus N auch $f\, x$ aus N sein muß, womit $(f : \mathsf{N} \to \mathsf{N})$ gezeigt ist.

Setzen wir $(f : \mathsf{N} \to \mathsf{N})$ voraus, folgt $\mathsf{E}_{\mathsf{E}^{\#}}\, f = \mathsf{E}^{\#}\, f$, was das Gewünschte leistet. □

Mit den Sätzen 41 und 42 ergibt sich:

Korollar 43 μ läßt sich in $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}})$ definieren.

Wir zeigen nun, daß sich sd_{N} und $\mathsf{and}_{\mathsf{N}}$ bereits ohne N-Striktheit mit Hilfe von E (und nach Satz 40 auch mit μ) definieren lassen. Dafür ist im wesentlichen der Totalitätstest verantwortlich, der für passend gewählte Funktionen bereits genügend N-Striktheit impliziert. Auf $\mathsf{E}^{\#}$ läßt sich das Argument wegen des fehlenden Totalitätstests nicht übertragen.

Satz 44 Es gibt $\mathcal{L}_{\mathsf{E}}$ Terme sd_{N} und $\mathsf{and}_{\mathsf{N}}$, so daß gilt:

1. $\mathsf{BON}(\mathsf{E}) \vdash \forall x.\mathsf{sd}_{\mathsf{N}}\, x = 0 \leftrightarrow \mathsf{N}(x)$,

2. $\mathsf{BON(E)} \vdash \forall x, y.\mathsf{N}(\mathsf{and_N}\, x\, y) \leftrightarrow \mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y)$.

Beweis: Wir setzen $\mathsf{sd_N} :\equiv \lambda x.\mathsf{E}\,(\lambda y.\mathsf{d_N}\, x\, 0\, y\, 0)$ und $\mathsf{and_N} :\equiv \lambda x, y.\mathsf{E}\,(\lambda z.\mathsf{d_N}\, x\, y\, z\, 0)$, womit sich die Behauptungen durch leichtes Nachrechnen verifizieren lassen. □

Analog zu Theorem 32 erhalten wir damit die Äquivalenz der beiden Zwischeninduktionen in $\mathsf{BON(E)}$ und $\mathsf{BON}(\mu)$.

Korollar 45 In $\mathsf{BON(E)}$ und $\mathsf{BON}(\mu)$ sind (O-$\mathrm{I_N}$) und (N-$\mathrm{I_N}$) äquivalent.

1.3.4 Beweistheorie

Für die Untersuchung der beweistheoretischen Stärken von $\mathsf{BON}(\mu)$, $\mathsf{BON(E)}$ und $\mathsf{BON(E^{\#})}$ verwenden wir neben PA die Fixpunkttheorien $\mathsf{ID}_1^{\#}$ und $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ als Referenztheorien, da diese auch einen direkten Bezug zu Frege-Strukturen haben.

Fixpunkttheorien

Die Theorien $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ (s. [Acz77, Fef82]) und $\mathsf{ID}_1^{\#}$ (s. [JS96]) sind in der Sprache $\mathcal{L}_1(FP)$ formuliert, welche die Sprache $\mathcal{L}_1$ von PA um Prädikatkonstanten $\mathcal{P}^\varphi$ für jede induktive Operatorform $\varphi(P, x)$, d.h. $\mathcal{L}_1$-Formel, in der $P(t)$ nur positiv auftritt, erweitert.

Die Axiome von $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ sind die von PA, erweitert auf die neue Sprache (d.h. insbesondere, daß bei Formelinduktion die neuen Konstanten $\mathcal{P}^\varphi$ beliebig auftreten dürfen) und die Fixpunktaxiome

$$\forall x.\varphi(\mathcal{P}^\varphi, x) \leftrightarrow \mathcal{P}^\varphi(x)$$

für jede neue Prädikatkonstante $\mathcal{P}^\varphi$. Damit repräsentiert $\mathcal{P}^\varphi$ einen Fixpunkt von $\varphi(P, x)$, aber nicht notwendigerweise den kleinsten.

Die Theorie $\mathsf{ID}_1^{\#}$ ist gleich $\widehat{\mathsf{ID}}_1$, wobei die Induktion auf Formeln eingeschränkt wird, bei denen die Konstanten $\mathcal{P}^\varphi$ nur positiv auftreten.

Die Bestimmung der beweistheoretischen Stärken von $\mathsf{BON}(\mu)$-Theorien erfolgt in der Literatur in der Regel nicht mit Fixpunkttheorien, sondern mittels Theorien iterierter Komprehension $(\Pi^0_1\text{-CA})_{<\omega^\omega}$ und $(\Pi^0_1\text{-CA})_{<\varepsilon_0}$ für die unteren Schranken und durch Ordinalzahltheorien über PA (PA^r_Ω, $\mathsf{PA}^r_\Omega + (\Sigma^\Omega\text{-}\mathrm{I_N})$ und PA^w_Ω) für die oberen Schranken. Wir wollen diese Theorien hier nicht extra angeben, sondern verweisen auf die Literatur [Fef70, Fri70, Sim86] bzw. [Jäg93, JS96, Str96b] und benutzen die folgenden beweistheoretischen Äquivalenzen:

Satz 46 [Acz77, Jäg93, JS96]

1. $\mathsf{PA}^r_\Omega \equiv \mathsf{PA}$,
2. $(\Pi^0_1\text{-CA})_{<\omega^\omega} \equiv \mathsf{PA}^r_\Omega + (\Sigma^\Omega\text{-}\mathrm{I_N}) \equiv \mathsf{ID}_1^{\#}$,
3. $(\Pi^0_1\text{-CA})_{<\varepsilon_0} \equiv \mathsf{PA}^w_\Omega \equiv \widehat{\mathsf{ID}}_1$.

Untere Schranken

Die unteren Schranken für den μ-Operator sind für die vier von uns diskutierten Formen von Induktion in [FJ93] und [JS96] bestimmt worden. Der wesentliche Schritt dabei ist, Lemma 17 in $\mathsf{BON}(\mu)$ auf arithmetische $\mathcal{L}_2$-Formeln auszudehnen, wobei Mengenvariablen durch Elemente von $P(\mathsf{N})$ interpretiert werden, und die Elementrelation $t \in X$ durch $x\,t = 0$ wiedergegeben wird, falls x die Mengenvariable X interpretiert.

Lemma 47 Zu jeder arithmetischen $\mathcal{L}_2$-Formel φ mit $\mathrm{FV}(\varphi) = \{\vec{X}, \vec{y}\}$ gibt es einen $\mathcal{L}_p$-Term t_φ, so daß gilt:

1. $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \vdash \forall \vec{x} \in P(\mathsf{N}).\forall \vec{y} : \mathsf{N}.t_\varphi\,\vec{x}\,\vec{y} = 0 \vee t_\varphi\,\vec{x}\,\vec{y} = 1$,
2. $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \vdash \forall \vec{x} \in P(\mathsf{N}).\forall \vec{y} : \mathsf{N}.\varphi^N(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow t_\varphi\,\vec{x}\,\vec{y} = 0$.

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man nun die unteren Schranken für $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}})$ und $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}})$ ohne weitere Verwendung von μ durch Einbettung von PA und $(\Pi^0_1\text{-CA})_{<\varepsilon_0}$ $(\equiv \widehat{\mathsf{ID}}_1)$ beweisen (s. [FJ93]). Da Lemma 47 ebenso für $\mathsf{BON}(\mathsf{E})$ und $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^\#)$ gültig ist, erhalten wir auch die unteren Schranken für diese Theorien mit $(\text{S-I}_{\mathsf{N}})$ und $(\text{F-I}_{\mathsf{N}})$.

Satz 48

1. $\mathsf{PA} \trianglelefteq \mathsf{BON}(\mu) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}})$, $\mathsf{PA} \trianglelefteq \mathsf{BON}(\mathsf{E}) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}})$, $\mathsf{PA} \trianglelefteq \mathsf{BON}(\mathsf{E}^\#) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}})$,
2. $\widehat{\mathsf{ID}}_1 \trianglelefteq \mathsf{BON}(\mu) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}})$, $\widehat{\mathsf{ID}}_1 \trianglelefteq \mathsf{BON}(\mathsf{E}) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}})$, $\widehat{\mathsf{ID}}_1 \trianglelefteq \mathsf{BON}(\mathsf{E}^\#) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}})$.

Jäger und Strahm bestimmen in [JS96] mit Hilfe eines Wohlordnungsbeweises die untere Schranke von $\mathsf{BON}(\mu) + (\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}})$. Neben Lemma 47 benötigt man dazu auch die Möglichkeit, mit Hilfe von μ via $\mathsf{N}(\mu\,t)$ zu testen, ob t eine Menge ist. Da dabei die Bestimmung einer Nullstelle uninteressant ist, läßt sich dieser Beweis auf $\mathsf{BON}(\mathsf{E})$ übertragen, wegen des fehlenden Totalitätstestes aber nicht auf $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^\#)$. Statt des Wohlordnungsbeweises kann man auch direkt $(\Pi^0_1\text{-CA})_{<\omega^\omega}$ einbetten, und dementsprechend erhalten wir mit der Äquivalenz von $(\text{O-I}_{\mathsf{N}})$ und $(\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}})$ in diesen Fällen $\mathsf{ID}^\#_1$ als untere Schranke:

Satz 49

1. $\mathsf{ID}^\#_1 \trianglelefteq \mathsf{BON}(\mu) + (\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mu) + (\text{O-I}_{\mathsf{N}})$,
2. $\mathsf{ID}^\#_1 \trianglelefteq \mathsf{BON}(\mathsf{E}) + (\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}) + (\text{O-I}_{\mathsf{N}})$.

Für $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^\#)$ ist nicht zu sehen, wie man auf gleichem Wege die untere Schranke für $(\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}})$ und $(\text{O-I}_{\mathsf{N}})$ bestimmen könnte. Falls wir jedoch $(\mathsf{N}\text{-Str})$ hinzunehmen, können wir E definieren und erhalten:

Satz 50

$$\mathsf{ID}_1^{\#} \trianglelefteq \mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\text{O-I}_{\mathsf{N}}).$$

Bemerkung 51 In Abschnitt 2.2.1 erhalten wir durch einen Umweg über eine Form von Frege-Strukturen für partielle applikative Theorien eine syntaktische Einbettung von $\mathsf{ID}_1^{\#}$ in $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + \forall x.\mathsf{N}(x) + (\text{O-I}_{\mathsf{N}})$.

Obere Schranken

Die oberen Schranken sind für $\mathsf{BON}(\mu)$ in [FJ93] und [JS96] durch Formalisierung des oben skizzierten Modells in den Ordinalzahltheorien über PA bestimmt worden. Daraus ergeben sich die folgenden oberen Schranken für die entsprechenden Fixpunkttheorien:

Satz 52 [FJ93, Theorem 23], [JS96, Theorem 26]

1. $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \trianglelefteq \mathsf{PA}$,
2. $\mathsf{BON}(\mu) + (\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}}) \trianglelefteq \mathsf{ID}_1^{\#}$,
3. $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{O-I}_{\mathsf{N}}) \trianglelefteq \mathsf{ID}_1^{\#}$,
4. $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}}) \trianglelefteq \widehat{\mathsf{ID}}_1$.

Da sich die modifizierten Operatorformen für die Applikation im Falle von E und $\mathsf{E}^{\#}$, wie oben kurz skizziert, analog zu μ in den Ordinalzahltheorien formalisieren lassen, erhalten wir den vorhergehenden Satz ebenso für $\mathsf{BON}(\mathsf{E})$ und $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#})$. Zudem gilt in den gewählten Modellen generell $\forall x.\mathsf{N}(x)$, so daß insbesondere $(\mathsf{N}\text{-Str})$ trivial erfüllt ist.

Zusammenfassend erhalten wir:

Theorem 53

1. $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + (\text{S-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{PA}$,
2. $\mathsf{BON}(\mu) + (\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}) + (\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\mathsf{N}\text{-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{ID}_1^{\#}$,
3. $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{O-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}) + (\text{O-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + (\mathsf{N}\text{-Str}) + (\text{O-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{ID}_1^{\#}$,
4. $\mathsf{BON}(\mu) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#}) + (\text{F-I}_{\mathsf{N}}) \equiv \widehat{\mathsf{ID}}_1$.

Kapitel 2

Frege-Strukturen

2.1 Frege-Strukturen für totale applikative Theorien

Frege-Strukturen wurden von Aczel in [Acz80] als ein semantisches Konzept eingeführt, das die Definition von Mengen auf der Grundlage eines *partiellen Wahrheitsprädikats* erlaubt. Beeson gab in [Bee85, Ch. XVII] eine Formalisierung von Frege-Strukturen als eine Wahrheitstheorie über applikativen Theorien an. Der dabei gewählte partielle Rahmen ist etwas problematisch, wie wir in Abschnitt 2.2 zeigen werden, daher sind alle folgenden, leicht voneinander abweichenden Formalisierungen in der Literatur im totalen Kontext durchgeführt worden.

Wir stellen zuerst die bekannten Resultate zu Frege-Strukturen zusammen, wobei insbesondere die Einbettung von $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ die syntaktische Ausdrucksstärke von Frege-Strukturen unterstreicht.

2.1.1 Die Theorie FON

Zur Definition der Frege-Strukturen erweitern wir die Sprache von TON um ein Wahrheitsprädikat und um Individuenkonstanten, die die Repräsentation von Formeln auf Termebene erlauben.

Die Theorie FON (Frege-Strukturen über TON) ist in der Sprache $\mathcal{L}_F$ formuliert, die $\mathcal{L}_t$ erweitert um

- das Relationssymbol T und
- die Individuenkonstanten $\dot{=}, \dot{\mathsf{N}}, \dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\forall}$ und $\dot{\mathsf{T}}$.

Als Abkürzungen setzen wir:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}(t) &:\Leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\, t) \\
\mathsf{P}(t) &:\Leftrightarrow \mathsf{T}(t) \leftrightarrow \neg \mathsf{F}(t) \\
\mathsf{C}(t) &:\Leftrightarrow \forall x.\mathsf{P}(t\, x)
\end{aligned}
$$

Für $\mathsf{T}(t)$ sagen wir auch „t ist wahr“, für $\mathsf{F}(t)$ „t ist falsch“, für $\mathsf{P}(t)$ „t ist eine Proposition“ und für $\mathsf{C}(t)$ „t ist eine Klasse“. Diese Klassen werden in der Literatur, insbesondere in der Originalarbeit von Aczel [Acz80, Def. 3.5], auch *propositionale Funktionen* genannt.

Die Axiome von FON umfassen diejenigen von TON, ausgedehnt auf die erweiterte Sprache, und zusätzlich die folgenden:

I. **Abschluß unter Primformeln von TON**

(1) $x = y \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{=}\, x\, y)$,

(2) $\neg x = y \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{=}\, x\, y))$,

(3) $\mathsf{N}(x) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\mathsf{N}}\, x)$,

(4) $\neg \mathsf{N}(x) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\mathsf{N}}\, x))$.

II. **Abschluß unter zusammengesetzten Formeln**

(5) $\mathsf{T}(x) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\neg}\, x))$,

(6) $\mathsf{T}(x) \wedge \mathsf{T}(y) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\wedge}\, x\, y)$,

(7) $\mathsf{T}(\dot{\neg}\, x) \vee \mathsf{T}(\dot{\neg}\, y) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\wedge}\, x\, y))$,

(8) $(\forall x.\mathsf{T}(f\, x)) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\forall}\, f)$,

(9) $(\exists x.\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(f\, x))) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\forall}\, f))$.

III. **Selbstreferenz**

(10) $\mathsf{T}(x) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\mathsf{T}}\, x)$,

(11) $\mathsf{T}(\dot{\neg}\, x) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\mathsf{T}}\, x))$.

Neben FON definieren wir noch die Theorie FON^+, bei der FON um das Konsistenzaxiom (Cons) für T erweitert wird.

(Cons) $\neg(\mathsf{T}(x) \wedge \mathsf{T}(\dot{\neg}\, x))$.

Bemerkung 54

1. Die Theorien FON und FON^+ sind äquivalent zu Cantinis Theorien NMF^- bzw. MF^- [Can96, Def. 8.9 und 7.1], bis auf den Umstand, daß Cantini die Konstanten $\dot{=}, \dot{\mathsf{N}}, \dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\forall}$ und $\dot{\mathsf{T}}$ als abgekürzte Terme eingeführt hat. Daraus resultieren in NMF^- automatisch gewisse Unabhängigkeiten für diese Terme, wie z.B. $(\dot{=}\, 0\, 0) \neq (\dot{\mathsf{N}}\, 0)$, die sich in FON nicht beweisen lassen. Da sie aber für die unteren Schranken der betrachteten Theorien nicht wesentlich sind, folgen wir mit der Hinzunahme neuer Konstanten der ursprünglichen Formulierung von Beeson [Bee85, Ch. XVII, Sec. 7.1].

2. Sowohl die ursprüngliche Formulierung von Aczel als auch eine Reihe von Formalisierungen von Frege-Strukturen haben neben T auch den Begriff P der Proposition axiomatisch eingeführt und dann die Wahrheitsaxiome auf diese Propositionen eingeschränkt. Alle diese Ansätze sind zumindest in FON^+ enthalten, verlieren aber durch die Einschränkungen auf Propositionen an syntaktischer Ausdruckskraft.

Bei den Abschlußbedingungen für T ist zu beachten, daß man die Negation im Fall des T-Prädikats selbst nicht von außen auf Termebene ziehen darf. Im allgemeinen lassen sich also keine T-negativen Aussagen in T-positive (s. Def. 57) übersetzen. Für Propositionen gilt dies allerdings, so daß die Diagonalisierung über $\dot{\neg}$ einen Term liefert, der keine Proposition ist. Dazu setzen wir in Satz 7 $\varphi(x) :\Leftrightarrow \mathsf{P}(x)$, $\psi(x) :\Leftrightarrow \mathsf{T}(x)$ und $\mathsf{neg}_\psi :\equiv \dot{\neg}$ und erhalten:

Lemma 55 $\mathsf{FON} \vdash \neg\forall x.\mathsf{P}(x)$.

2.1.2 Abstraktion

Mit Hilfe der neuen Individuenkonstanten können wir nun $\mathcal{L}_F$-Formeln durch $\mathcal{L}_F$-Terme ohne irgendeine Form von Gödelisierung repräsentieren.

Definition 56 Wir definieren zu jeder $\mathcal{L}_F$-Formel φ einen $\mathcal{L}_F$-Term $\dot{\varphi}$ induktiv über den Aufbau von φ:

$$
\begin{aligned}
\overbrace{t = s}^{\cdot} &:\equiv \dot{=}\, t\, s, \\
\overbrace{\mathsf{N}(t)}^{\cdot} &:\equiv \dot{\mathsf{N}}\, t, \\
\overbrace{\mathsf{T}(t)}^{\cdot} &:\equiv \dot{\mathsf{T}}\, t, \\
\overbrace{\neg\varphi}^{\cdot} &:\equiv \dot{\neg}\, \dot{\varphi}, \\
\overbrace{\varphi \wedge \psi}^{\cdot} &:\equiv \dot{\wedge}\, \dot{\varphi}\, \dot{\psi}, \\
\overbrace{\forall y.\varphi}^{\cdot} &:\equiv \dot{\forall}\, (\lambda y.\dot{\varphi}).
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe dieser Terme werden wir Abstraktionen in Frege-Strukturen einführen, die allerdings in Hinblick auf die Selbstreferenzaxiome nur für T-positive Formeln sinnvoll sind. Wir definieren simultan T-positive und T-negative Formeln induktiv über Formelaufbau:

Definition 57

1. $t = s$, $\mathsf{N}(t)$, $\neg t = s$ und $\neg\mathsf{N}(t)$ sind sowohl T-positiv als auch T-negativ.

2. $\mathsf{T}(t)$ ist T-positiv; $\neg\mathsf{T}(t)$ ist T-negativ.

3. Ist φ T-positiv (T-negativ), dann ist $\neg\varphi$ T-negativ (T-positiv).

4. Sind φ und ψ T-positiv (T-negativ), dann auch $\varphi \wedge \psi$.

5. Ist φ T-positiv (T-negativ), dann auch $\forall x.\varphi$.

Durch Induktion über den Aufbau von φ erhält man als zentralen Satz für Frege-Strukturen:

Satz 58 [Can96, Th. 8.8.] Ist φ eine T-positive $\mathcal{L}_F$-Formel, dann gilt:

$$\mathsf{FON} \vdash \mathsf{T}(\dot{\varphi}) \leftrightarrow \varphi.$$

Damit lassen sich Abstraktionsterme für beliebige $\mathcal{L}_F$-Formeln zusammen mit einer Elementrelation einführen:

Definition 59 Seien t und s $\mathcal{L}_F$-Terme und φ eine $\mathcal{L}_F$-Formel, dann setzen wir

$$\begin{array}{rcl} \{x|\varphi\} & :\equiv & \lambda x.\dot{\varphi}, \\ t \in s & :\Leftrightarrow & \mathsf{T}(s\,t). \end{array}$$

Satz 58 garantiert die intendierten Eigenschaften dieser Abkürzungen, allerdings nur, wenn man von einer T-positiven $\mathcal{L}_F$-Formel φ ausgeht. In diesem Fall gilt:

$$x \in \{x|\varphi\} \leftrightarrow \varphi.$$

Bemerkung 60 Definition 59 erlaubt es, eine Mengenlehre für applikative Theorien einzuführen, womit sich Frege-Strukturen als eine Alternative zur Theorie EET („elementary theory of types and names“) von Feferman und Jäger [FJ96] anbieten. Im Vergleich zu EET haben Frege-Strukturen den Vorteil, syntaktisch ausdrucksstärker zu sein, was sich besonders in der einfachen Einbettbarkeit von $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ äußert (s. Satz 63), die für EET nicht zu sehen ist. Andererseits läßt sich EET auf natürliche Weise über BON formulieren, was für Frege-Strukturen etwas problematisch ist (s. Abs. 2.2). Hayashi und Kobayashi haben in [HK95] eine Version von Frege-Strukturen definiert, die äquivalent zu EET über TON ist, deren Wahrheitsaxiome aber auf Propositionen eingeschränkt sind.

2.1.3 Induktionen

Im Rahmen der Frege-Strukturen werden wir die folgenden drei Formen vollständiger Induktion über N betrachten.

1. Klasseninduktion auf N (C-I_{N})

$$\mathsf{C}(f) \wedge \mathsf{T}(f\,0) \wedge (\forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(f\,x) \rightarrow \mathsf{T}(f\,(x'))) \rightarrow \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(f\,x).$$

2. **Wahrheitsinduktion auf N** (T-I_{N})

$$\mathsf{T}(f\,0) \wedge (\forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(f\,x) \to \mathsf{T}(f\,(x'))) \to \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(f\,x).$$

3. **Formelinduktion auf N** (F-I_{N})

$$\varphi(0) \wedge (\forall x : \mathsf{N}.\varphi(x) \to \varphi(x')) \to \forall x : \mathsf{N}.\varphi(x).$$

Unsere Theorien $\mathsf{FON}^+ + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$, $\mathsf{FON}^+ + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ und $\mathsf{FON}^+ + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ entsprechen damit den Theorien MF_c, MF_p bzw. MF von Cantini [Can96].

2.1.4 Modelle

In diesem Abschnitt geben wir kurz die allgemeine Modellkonstruktion für Frege-Strukturen mit Konsistenz aus [FM87b, §4] wieder.

Definition 61 Sei $\mathcal{M}$ eine N-erweiterte kombinatorische Algebra mit Trägermenge M. Dann ist

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) = (\mathcal{M}, \dot{=}, \dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\mathsf{N}}, \dot{\forall}, \dot{\mathsf{T}}, \mathcal{T})$$

mit $\dot{=} \in M, \ldots, \dot{\mathsf{T}} \in M, \mathcal{T} \subset M$ eine *Frege-Struktur*, wenn gilt:

1. $\dot{=}\,x\,y \in \mathcal{T} \Leftrightarrow x = y$,
2. $\dot{\neg}\,(\dot{=}\,x\,y) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow x \neq y$,
3. $\dot{\mathsf{N}}\,x \in \mathcal{T} \Leftrightarrow x \in N$,
4. $\dot{\neg}\,(\dot{\mathsf{N}}\,x) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow x \notin N$,
5. $\dot{\neg}\,(\dot{\neg}\,x) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow x \in \mathcal{T}$,
6. $\dot{\wedge}\,x\,y \in \mathcal{T} \Leftrightarrow x \in \mathcal{T}$ und $y \in \mathcal{T}$,
7. $\dot{\neg}\,(\dot{\wedge}\,x\,y) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \dot{\neg}\,x \in \mathcal{T}$ oder $\dot{\neg}\,y \in \mathcal{T}$,
8. $\dot{\forall}\,f \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ Für alle $a \in M$ gilt: $f\,a \in \mathcal{T}$,
9. $\dot{\neg}\,(\dot{\forall}\,f) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ Es gibt ein $a \in M$ mit: $\dot{\neg}\,(f\,a) \in \mathcal{T}$,
10. $\dot{\mathsf{T}}\,x \in \mathcal{T} \Leftrightarrow x \in \mathcal{T}$,
11. $\dot{\neg}\,(\dot{\mathsf{T}}\,x) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \dot{\neg}\,x \in \mathcal{T}$,
12. Es gibt kein $a \in M$ mit: $a \in \mathcal{T} \wedge \dot{\neg}\,a \in \mathcal{T}$.

Nun läßt sich mit Hilfe des kleinsten Fixpunktes eines entsprechend definierten Operators zeigen:

Satz 62 [FM87b, Theorem 4.2] Jede N-erweiterte kombinatorische Algebra $\mathcal{M}$ läßt sich zu einer Frege-Struktur erweitern.

2.1.5 Beweistheorie

Untere Schranken

Zum Beweis der unteren Schranken betten wir die Theorien PA, $\mathsf{ID}_1^{\#}$ bzw. $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ in FON mit (C-I_{N}), (T-I_{N}) bzw. (F-I_{N}) ein (vgl. [Can96, §10A]). Für die beiden letzten Fälle dehnen wir die Interpretation $\cdot^N$ von $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_t$ (s. S. 18) auf die Fixpunktkonstanten $\mathcal{P}^\varphi$ für jede induktive Operatorform $\varphi(P,x)$ von $\mathcal{L}_1$ aus. Die Idee dabei ist, den rekursionstheoretischen Fixpunkt des φ^N repräsentierenden Terms zu verwenden. Sei p eine Individuenvariable, die in φ nicht vorkommt, dann ist die Übersetzung $\varphi(P,x)^N$ eine T-positive Formel, wenn man $P(t)$ durch $\mathsf{T}(p\,t)$ wiedergibt. Nun setzen wir

$$\begin{aligned} p_\varphi \quad &:\equiv \quad \mathsf{rec}\,(\lambda p, x.\overbrace{\varphi(P,x)^N}^{\cdot}) \\ &= \quad \mathsf{rec}\,(\lambda p, x.\overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p\,\cdot), x)}^{\cdot}). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus dem Rekursionssatz und der Verträglichkeit von $\dot{\varphi}$ mit Substitution

$$p_\varphi\, x = (\lambda p, x.\overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p\,\cdot), x)}^{\cdot})\, p_\varphi\, x = \overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p_\varphi\,\cdot), x)}^{\cdot}.$$

Definieren wir

$$\mathcal{P}^\varphi(t)^N :\Leftrightarrow \mathsf{T}(p_\varphi\, t^N),$$

so folgt:

Satz 63

1. $\mathsf{PA} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FON} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^N$,
2. $\mathsf{ID}_1^{\#} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FON} + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^N$,
3. $\widehat{\mathsf{ID}}_1 \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FON} + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^N$.

Beweis: Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Einbettbarkeit von PA in TON und Satz 58, da $\mathcal{L}_t$-Formeln in FON durch Propositionen repräsentiert werden und so Formelinduktion für $\mathcal{L}_t$-Formeln in Klasseninduktion in FON übergeht.

Für die zweite und dritte Behauptung zeigen wir zuerst das Fixpunktaxiom. Dabei nutzen wir aus, daß die Übersetzung von φ eine T-positive Formel ist, so daß sich Satz 58 anwenden läßt. Im folgenden sei $\mathsf{N}(x)$ vorausgesetzt.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\varphi(x)^N \quad &\leftrightarrow \quad \mathsf{T}(p_\varphi\, x) \\ &\leftrightarrow \quad \mathsf{T}(\overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p_\varphi\,\cdot), x)}^{\cdot}) \\ &\leftrightarrow \quad \varphi^N(\mathsf{T}(p_\varphi\,\cdot), x) \\ &\leftrightarrow \quad \varphi^N((\mathcal{P}^\varphi)^N, x) \\ &\leftrightarrow \quad \varphi(\mathcal{P}^\varphi, x)^N. \end{aligned}$$

Da in $\mathsf{ID}_1^{\#}$ Induktion nur für Formeln $\psi(x)$ mit positivem Auftreten der Fixpunktkonstanten $\mathcal{P}^{\varphi}$ zugelassen ist, können wir diese Formeln in $\mathsf{T}((\lambda x.\dot{\psi^N})\,x)$ übersetzen und $\mathsf{ID}_1^{\#}$ in $\mathsf{FON} + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ einbetten. (Klasseninduktion reicht nicht, da wir im allgemeinen nicht $\mathsf{P}(p_{\varphi})$ und damit auch nicht $\mathsf{P}(\lambda x.\dot{\psi^N})$ beweisen können.)

Die allgemeine Formelinduktion von $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ läßt sich sofort mit $(\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ verifizieren und wir erhalten auch die letzte Behauptung. $\Box$

Obere Schranken

Für den Beweis der oberen Schranken verweisen wir auf [Can96, § 57]. Cantini bestimmt sie dort mit Hilfe von Schnittelimination für die Theorien MF_c, MF_p und MF. Aus den beweistheoretischen Ordinalzahlen ergibt sich, daß die unteren Schranken auch bei Hinzunahme von Konsistenz scharf sind, und wir erhalten:

Satz 64

1. $\mathsf{FON} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{FON}^+ + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{PA}$,
2. $\mathsf{FON} + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{FON}^+ + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{ID}_1^{\#}$,
3. $\mathsf{FON} + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{FON}^+ + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \equiv \widehat{\mathsf{ID}}_1$.

Bemerkung 65 Die oberen Schranken lassen sich auch durch eine Einbettung der Theorien in die im Abschnitt 1.3.4 angesprochenen Ordinalzahltheorien über PA zeigen. Dabei wird das Konsistenzaxiom mit Hilfe der in diesen Theorien zur Verfügung stehenden Ordinalzahlinduktion verifiziert.

2.2 Frege-Strukturen für partielle applikative Theorien

Der Versuch, Frege-Strukturen direkt für partielle applikative Theorien zu definieren, führt zu gewissen Schwierigkeiten mit der Striktheit. Ein erster Versuch wäre, in der Theorie FON (nun über BON formuliert) eine neue Konstante $\dot{\downarrow}$ einzuführen, und die Wahrheitsbedingung für negierte Existenz wie folgt zu axiomatisieren:

$$\neg(x\downarrow) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,x)).$$

Dieses Axiom wäre aber sinnlos, da Variablen in der Logik partieller Terme immer definiert sind.

Das entsprechende Axiomenschema

$$\neg(t\downarrow) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,t))$$

verletzt die Striktheit, falls es einen undefinierten Term t gibt, oder anders gesagt, es beweist (Tot).

Dieses Problem wurde von Beeson in [Bee85] übersehen. Frege-Strukturen sind dort in einem partiellen Rahmen definiert, Satz XVII.9.1 zur Abstraktion kann in der angegebenen Form aber nur für den totalen Fall bewiesen werden (oder in eingeschränkter Form durch Außerachtlassung von Formeln mit undefinierten Termen, s. unten). Aus diesem Grund sind alle anderen Axiomatisierungen von Frege-Strukturen in der Literatur jeweils für totale Theorien durchgeführt worden.

Wir werden im folgenden die Theorien ohne das Konsistenzaxiom (Cons) formulieren. Man kann sich aber leicht überlegen, daß alle Resultate auch in den entsprechenden Theorien mit Konsistenz gelten.

2.2.1 Ignorieren undefinierter Terme

Eine Lösungsmöglichkeit für das oben geschilderte Problem ist das Ignorieren undefinierter Terme in der Axiomatisierung für T. Zwar erhält man damit keine wirkliche Wahrheitstheorie für die ganze Theorie BON, wohl aber für den „definierten Teil". Dabei ist die Abstraktion auf Formeln eingeschränkt, die nur definierte Terme enthalten, was aber ausreicht, um die dem totalen Fall entsprechenden beweistheoretischen Stärken zu erhalten. Für diese Theorie $\mathsf{FPA}^\star$ (schwache Frege-Strukturen für partielle applikative Theorien) erweitern wir BON in der gleichen Weise wie TON.

Die Sprache von $\mathsf{FPA}^\star$ ist $\mathcal{L}_p$, erweitert um das neue Relationssymbol T und die neuen Individuenkonstanten $\dot{=}$, $\dot{\mathsf{N}}$, $\dot{\neg}$, $\dot{\wedge}$, $\dot{\forall}$ und $\dot{\mathsf{T}}$.

Die Axiome von $\mathsf{FPA}^\star$ sind die Axiome von BON, ausgedehnt auf die neue Sprache, und die zusätzlichen Axiome von FON (s. S. 36).

Bemerkung 66 In $\mathsf{FPA}^\star$ gibt es keinen direkten Term, um $t\downarrow$ zu repräsentieren. In BON ist die Formel aber mit $t = t$ äquivalent, so daß sie sich mit Hilfe der entsprechenden Gleichung repräsentieren läßt. Allerdings muß man beachten, daß die Variablen in den Axiomen von FON in einer Logik der partiellen Terme immer definiert sind und sich somit nicht für Formeln mit undefinierten Termen eignen. Man kann also trotz der Äquivalenz von $\neg\, t\downarrow$ mit $\neg t = t$ für den undefinierten Term t nicht das Axiom I.(2) $\neg x = y \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{=}\,x\,y))$ verwenden.

Definiert man nun $\dot{\varphi}$ als repräsentierenden Term für φ in der gleichen Weise wie in FON, so erhält man den zentralen Satz für Frege-Strukturen in einer eingeschränkten Form:

Satz 67 Sei φ eine T-positive Formel, die keine zusammengesetzten Terme enthält, d.h. das Funktionssymbol $\cdot$ für die Applikation nicht enthält. Dann gilt:

$$\mathsf{FPA}^\star \vdash \mathsf{T}(\dot{\varphi}) \leftrightarrow \varphi.$$

Da φ keine zusammengesetzten Terme enthalten darf, gilt der Satz in allgemeinerer Formulierung nur für definierte, zusammengesetzte Terme, die sich für Variablen einsetzen lassen, d.h. für eine T-positive Formel $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, die das Applikationssymbol $\cdot$ nicht enthält, gilt:

$$\mathsf{FPA}^\star \vdash t_1\downarrow \wedge \ldots \wedge t_n\downarrow \to \mathsf{T}(\overbrace{\varphi(t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n)}^{\cdot}) \leftrightarrow \varphi(t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n)).$$

Für die beweistheoretische Stärke von $\mathsf{FPA}^\star$ folgen die oberen Schranken aus Satz 64, da $\mathsf{FPA}^\star + (\mathrm{Tot})$ gerade FON ist. Da die im Beweis von Satz 63 angegebene Interpretation von PA, $\mathsf{ID}_1^\#$ und $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ in FON unter ausschließlicher Verwendung von definierten Termen durchgeführt wird, liefert Satz 67 auch die gleichen beweistheoretischen unteren Schranken.

Satz 68

1. $\mathsf{FPA}^\star + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N}) \equiv \mathsf{PA}$,
2. $\mathsf{FPA}^\star + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N}) \equiv \mathsf{ID}_1^\#$,
3. $\mathsf{FPA}^\star + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N}) \equiv \widehat{\mathsf{ID}}_1$.

Nun untersuchen wir noch eine interessante Eigenschaft von $\mathsf{FPA}^\star$: Die Aussage $\forall x.\mathsf{P}(x)$ ist konsistent mit $\mathsf{FPA}^\star$ (im Gegensatz zu FON). Dies läßt sich durch eine Einbettung von $\mathsf{FPA}^\star + \forall x.\mathsf{N}(x) + \forall x.\mathsf{P}(x)$ in $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^\#) + \forall x.\mathsf{N}(x)$ (s. Abschnitt 1.3) zeigen. Die Idee der Übersetzung besteht darin, $\mathsf{T}(t)$ mit $t=1$ und $\dot\neg$ mit $\lambda x.\mathsf{d_N}\,1\,0\,x\,0$ zu interpretieren. Damit ergibt sich $\forall x.\mathsf{P}(x)$ direkt aus den Eigenschaften von N. Bei den anderen Konstanten von $\mathsf{FPA}^\star$ läßt sich der kritische Fall des Allquantors dann mit Hilfe von $\mathsf{E}^\#$ behandeln. Sei also $\cdot^+$ die Interpretation der Sprache von $\mathsf{FPA}^\star$ in die von $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^\#)$, für die wir setzen:

$$\begin{array}{rcl}
\dot{=}^+ & :\equiv & \lambda x,y.\mathsf{d_N}\,1\,0\,x\,y,\\
\dot{\mathsf{N}}^+ & :\equiv & \lambda x.1,\\
\dot\neg^+ & :\equiv & \lambda x.\mathsf{d_N}\,1\,0\,x\,0,\\
\dot\forall^+ & :\equiv & \lambda f.\mathsf{E}^\#\,f,\\
\dot{\mathsf{T}}^+ & :\equiv & \lambda x.x,\\
c^+ & :\equiv & c \ \text{ für alle anderen Individuenkonstanten},\\
x^+ & :\equiv & x,\\
(t\,s)^+ & :\equiv & t^+\,s^+.
\end{array}$$

Nun definieren wir $\mathsf{T}(t)^+ :\Leftrightarrow t^+ = 1$ und setzen $\cdot^+$ kanonisch auf alle Formeln fort. Dann gilt:

Satz 69 $\mathsf{FPA}^\star + \forall x.\mathsf{P}(x) + \forall x.\mathsf{N}(x) \vdash \varphi \quad\Rightarrow\quad \mathsf{BON}(\mathsf{E}^\#) + \forall x.\mathsf{N}(x) \vdash \varphi^+$.

Beweis: Der Satz ergibt sich durch leichtes Nachrechnen. Wir geben hier den Fall der negierten Allquantifikation (Axiom II.(8)) an:

$$\begin{aligned}
(\exists x.\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(f\,x)))^+ &\leftrightarrow \exists x.(\dot{\neg}\,(f\,x))^+ = 1\\
&\leftrightarrow \exists x.\mathsf{d_N}\,1\,0\,(f\,x)\,0 = 1\\
&\leftrightarrow \exists x.f\,x = 0\\
&\leftrightarrow \mathsf{E}^{\#}\,f = 0\\
&\leftrightarrow (\dot{\forall}\,f)^+ = 0\\
&\leftrightarrow \mathsf{d_N}\,1\,0\,(\dot{\forall}\,f)^+\,0 = 1\\
&\leftrightarrow \dot{\neg}^+\,(\dot{\forall}\,f)^+ = 1\\
&\leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\forall}\,f))^+. \qquad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung 70 Da die oberen Schranken für $\mathsf{BON}(\mathsf{E}^{\#})$ mit Hilfe rekursionstheoretischer Modelle bestimmt wurden, in denen auch $\forall x.\mathsf{N}(x)$ gilt, liefert diese Interpretation, bei der $(\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})$ in $(\mathrm{S}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})$ und $(\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})$ in $(\mathrm{O}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})$ übergeht, die gleichen beweistheoretischen oberen Schranken für $\mathsf{FPA}^\star + \forall x.\mathsf{P}(x) + \forall x.\mathsf{N}(x)$ wie für $\mathsf{FPA}^\star$.

2.2.2 Die Theorie FPA

In einem zweiten Ansatz lösen wir das Striktheitsproblem mit Hilfe von *Zeigern* („pointers"). Dazu ordnen wir jedem, möglicherweise undefinierten Term t ein Objekt $\bar{t}$ zu, das immer definiert ist und erlaubt, t selbst zurückzugewinnen. In diesem Sinne spielt $\bar{t}$ die Rolle eines Zeigers auf t. Ein geeigneter Kandidat für $\bar{t}$ ist in BON die konstante Funktion $\lambda y.t$ mit $y \notin \mathrm{FV}(t)$. Diese ist immer definiert und man erhält t durch einfache Anwendung auf 0.

Im Gegensatz zum totalen Fall, bei dem die Funktion $t \mapsto \lambda y.t$ mit $y \notin \mathrm{FV}(t)$ innerhalb der Theorie durch $\lambda f.\mathsf{k}\,f$ definierbar ist, erfolgt die Definition dieses λ-Terms im partiellen Fall induktiv über den Aufbau der Terme. Daher ist in unserem Fall die Abbildung $t \mapsto \lambda y.t$ mit $y \notin \mathrm{FV}(t)$ eine metatheoretische Operation, die insbesondere nicht mit Substitution verträglich ist. Glücklicherweise wird diese Operation für die Einführung von Abstraktionen auf der Objektebene nicht benötigt. In der Formalisierung bilden wir auch nicht die Terme t auf ihre Zeiger $\bar{t}$ ab, sondern starten umgekehrt mit Zeigern, die nichts anderes als konstante Funktionen sind, und berechnen deren Werte durch Anwendung auf 0. So wird beispielsweise die Wahrheitsbedingung für negierte Existenz, die sich auf direktem Wege durch das Schema $\neg(t\downarrow) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,\bar{t}))$ angeben ließe, durch das Axiom $\mathsf{Cf}(x) \to (\neg(\mathsf{val}\,x\downarrow) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,x)))$ wiedergegeben, wobei die folgenden Abkürzungen verwendet werden:

$$\mathsf{Cf}(t) :\Leftrightarrow \forall x, y.t\,x \simeq t\,y \qquad \text{und} \qquad \mathsf{val} :\equiv \lambda x.x\,0.$$

Damit definieren wir die Theorie FPA für Frege-Strukturen über BON wie folgt:

Die Sprache $\mathcal{L}_p^F$ von FPA ist die Sprache $\mathcal{L}_p$ erweitert um

- das Relationssymbol T und
- die Individuenkonstanten $\dot{\downarrow}, \dot{=}, \dot{\mathsf{N}}, \dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\forall}$ und $\dot{\mathsf{T}}$.

Die Axiome von FPA sind die Axiome von BON, erweitert auf die neue Sprache, sowie die Axiome von FON (s. S. 36), wobei die erste Gruppe, der Abschluß unter Primformeln von TON, ersetzt wird durch:

I. **Abschluß unter Primformeln von BON**

(1) $\mathsf{Cf}(x) \to (\mathsf{val}\, x \downarrow \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\downarrow}\, x))$,

(2) $\mathsf{Cf}(x) \to (\neg\, \mathsf{val}\, x \downarrow \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\, (\dot{\downarrow}\, x)))$,

(3) $\mathsf{Cf}(x) \wedge \mathsf{Cf}(y) \to (\mathsf{val}\, x = \mathsf{val}\, y \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{=}\, x\, y))$,

(4) $\mathsf{Cf}(x) \wedge \mathsf{Cf}(y) \to (\neg \mathsf{val}\, x = \mathsf{val}\, y \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\, (\dot{=}\, x\, y)))$,

(5) $\mathsf{Cf}(x) \to (\mathsf{N}(\mathsf{val}\, x) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\mathsf{N}}\, x))$,

(6) $\mathsf{Cf}(x) \to (\neg \mathsf{N}(\mathsf{val}\, x) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\, (\dot{\mathsf{N}}\, x)))$.

Da wir in FON keine Wahrheitsdefinition für $\neg \mathsf{T}(x)$ haben, müssen wir beim Wahrheitsprädikat auch keine undefinierten Terme t, für die aufgrund der Striktheit $\neg \mathsf{T}(t)$ gilt, berücksichtigen und können bei den Selbstreferenzaxiomen auf die Verwendung von Zeigern verzichten.

2.2.3 Totalität

Zuerst wollen wir zeigen, daß unser Ansatz mit Totalität verträglich ist, in dem Sinne, daß FPA + (Tot) und FON äquivalent sind. Zwar sind sie nicht so trivial ineinander übersetzbar wie BON + (Tot) und TON, aber wir können zwei Interpretationen angeben, so daß sie sich gegenseitig einbetten lassen. (Im folgenden ergibt sich aus dem Kontext, ob $\dot{=}$ und $\dot{\mathsf{N}}$ zu $\mathcal{L}_p^F$ oder $\mathcal{L}_F$ gehören.)

Definition 71 Wir definieren $\cdot^*$ als Übersetzung der Sprache $\mathcal{L}_p^F$ in $\mathcal{L}_F$, indem wir setzen:

$$\begin{aligned}
\dot{\downarrow}^* &:\equiv (\lambda x.\dot{=}\, 0\, 0), \\
\dot{=}^* &:\equiv (\lambda x, y.\dot{=}\, (\mathsf{val}\, x)\, (\mathsf{val}\, y)), \\
\dot{\mathsf{N}}^* &:\equiv (\lambda x.\dot{\mathsf{N}}\, (\mathsf{val}\, x)), \\
c^* &:\equiv c \qquad \text{für alle anderen Individuenkonstanten}, \\
x^* &:\equiv x, \\
(t\, s)^* &:\equiv t^*\, s^*,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(t\downarrow)^* &:\Leftrightarrow 0=0,\\
\mathsf{N}(t)^* &:\Leftrightarrow \mathsf{N}(t^*),\\
(t=s)^* &:\Leftrightarrow t^*=s^*,\\
\mathsf{T}(t)^* &:\Leftrightarrow \mathsf{T}(t^*)
\end{aligned}
$$

und diese Interpretation auf alle $\mathcal{L}_p^F$-Formeln auf kanonische Weise fortsetzen.

Damit ergibt sich durch einfaches Nachrechnen:

Satz 72 $\mathsf{FPA} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FON} \vdash \varphi^*$.

Definition 73 Wir definieren $\cdot^+$ als Übersetzung der Sprache $\mathcal{L}_F$ in $\mathcal{L}_p^F$, indem wir setzen:

$$
\begin{aligned}
\dot{=}^+ &:\equiv \lambda x, y.\dot{=}(\mathsf{k}\,x)(\mathsf{k}\,y),\\
\dot{\mathsf{N}}^+ &:\equiv \lambda x.\dot{\mathsf{N}}(\mathsf{k}\,x),\\
c^+ &:\equiv c \qquad \text{für alle anderen Individuenkonstanten,}\\
x^+ &:\equiv x
\end{aligned}
$$

und diese Interpretation kanonisch auf alle $\mathcal{L}_F$-Terme und -Formeln fortsetzen.

Satz 74 $\mathsf{FON} \vdash \psi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FPA} + (\mathrm{Tot}) \vdash \psi^+$.

Beweis: Auch dieser Satz läßt sich leicht nachrechnen. Wir zeigen den Fall der (positiven) Gleichheit. Dazu überlegt man sich zuerst, daß $\forall x.\mathsf{Cf}(\mathsf{k}\,x)$ in $\mathsf{FPA} + (\mathrm{Tot})$ trivial erfüllt ist. Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T}(\dot{=}\,x\,y)^+ &\leftrightarrow \mathsf{T}((\lambda x, y.\dot{=}(\mathsf{k}\,x)(\mathsf{k}\,y))\,x\,y)\\
&\leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{=}(\mathsf{k}\,x)(\mathsf{k}\,y))\\
&\leftrightarrow \mathsf{val}(\mathsf{k}\,x) = \mathsf{val}(\mathsf{k}\,y)\\
&\leftrightarrow \mathsf{k}\,x\,0 = \mathsf{k}\,y\,0\\
&\leftrightarrow x = y\\
&\leftrightarrow (x=y)^+. \qquad \square
\end{aligned}
$$

2.2.4 Abstraktion

Wie in FON lassen sich in FPA Abstraktionen einführen. Allerdings müssen wir eine kompliziertere Repräsentation der Formeln auf Termebene als in FON wählen, um den Striktheitsproblemen zu entgehen. Die Idee dabei ist es, in Primformeln von BON statt der Argumente, die möglicherweise undefiniert sind, die entsprechenden Zeiger zu wählen.

Definition 75 Wir definieren zu jeder $\mathcal{L}_F^p$-Formel φ einen $\mathcal{L}_F^p$-Term $\dot{\varphi}$ induktiv über den Aufbau von φ:

$$
\begin{array}{rcll}
\overset{\cdot}{\overbrace{t\downarrow}} & :\equiv & \dot{\downarrow}(\lambda y.t), & y \notin \mathrm{FV}(t), \\
\overset{\cdot}{\overbrace{t = s}} & :\equiv & \dot{=}(\lambda y.t)(\lambda y.s), & y \notin \mathrm{FV}(t,s), \\
\overset{\cdot}{\overbrace{\mathsf{N}(t)}} & :\equiv & \dot{\mathsf{N}}(\lambda y.t), & y \notin \mathrm{FV}(t), \\
\overset{\cdot}{\overbrace{\mathsf{T}(t)}} & :\equiv & \dot{\mathsf{T}}\,t, & \\
\overset{\cdot}{\overbrace{\neg\varphi}} & :\equiv & \dot{\neg}\,\dot{\varphi}, & \\
\overset{\cdot}{\overbrace{\varphi \wedge \psi}} & :\equiv & \dot{\wedge}\,\dot{\varphi}\,\dot{\psi}, & \\
\overset{\cdot}{\overbrace{\forall y.\varphi}} & :\equiv & \dot{\forall}(\lambda y.\dot{\varphi}). &
\end{array}
$$

Wie oben bemerkt, ist die hier verwendete λ-Abstraktion induktiv über den Aufbau der Terme definiert. Damit ist die angegebene Abbildung im allgemeinen nicht mit Substitution verträglich. Solange wir sie aber nur auf der Metaebene verwenden, ist diese Eigenschaft nicht nötig, insbesondere nicht beim Beweis des Abstraktionssatzes.

Satz 76 Für jede T-positive $\mathcal{L}_p^F$-Formel φ gilt:

$$\mathsf{FPA} \vdash \mathsf{T}(\dot{\varphi}) \leftrightarrow \varphi.$$

Beweis: Der Satz folgt wie im totalen Fall durch Induktion über den Formelaufbau. Wir beschränken uns hier auf den Fall $\neg\, t\downarrow$, um die Rolle der Zeiger zu illustrieren.

$$
\begin{array}{rcll}
\mathsf{T}(\overset{\cdot}{\overbrace{\neg\, t\downarrow}}) & \leftrightarrow & \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}(\lambda y.t))) & (y \notin \mathrm{FV}(t)) \\
& \leftrightarrow & \neg\,\mathsf{val}\,(\lambda y.t)\downarrow & \\
& \leftrightarrow & \neg\,(\lambda y.t)\,0\downarrow & \\
& \leftrightarrow & \neg\, t\downarrow. & \square
\end{array}
$$

2.2.5 Beweistheorie

Mit Satz 72 ergeben sich die oberen Schranken für FPA aus denen von FON. Für die unteren Schranken benutzen wir Satz 76, mit dem sich der Beweis von Satz 63 auf FPA übertragen läßt. Dabei muß man sich nur überzeugen, daß die im Beweis vorgenommene Substitution von p_φ für p in dem dortigen Term $\dot{\varphi}$ auch in FPA möglich ist. Probleme mit Substitutionen in $\dot{\varphi}$ treten allerdings nur bei Primformeln von BON auf, bei denen wir die Argumente durch entsprechende Zeiger ersetzen müssen. Da

p_φ aber in einer Teilformel $\mathsf{T}(p\,\cdot)$ substituiert wird, gilt für die entsprechenden Terme in FPA:

$$\begin{aligned} p_\varphi\, x &= (\lambda p, x.\overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p\,\cdot), x)}^{\cdot})\, p_\varphi\, x \\ &= \overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p\,\cdot), x)}^{\cdot}[p_\varphi/p, x/x] \\ &= \overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p_\varphi\,\cdot), x)}^{\cdot}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

Satz 77

1. $\mathsf{FPA} + (\text{C-I}_\mathsf{N}) \equiv \mathsf{PA}$,
2. $\mathsf{FPA} + (\text{T-I}_\mathsf{N}) \equiv \mathsf{ID}_1^\#$,
3. $\mathsf{FPA} + (\text{F-I}_\mathsf{N}) \equiv \widehat{\mathsf{ID}}_1$.

2.2.6 Konsistenz von $\mathsf{FPA} + \forall x.\mathsf{P}(x)$

Wie für $\mathsf{FPA}^\star$ stellt sich auch für FPA die Frage, ob $\forall x.\mathsf{P}(x)$ konsistent ist. Diese Frage ist noch offen; es läßt sich aber zeigen, daß eine zu $\mathsf{FPA}^\star$ analoge Behandlung von $\mathsf{FPA}+\forall x.\mathsf{P}(x)$, bei der man $\forall x.\mathsf{N}(x)$ hinzunimmt und $\mathsf{T}(x)$ durch eine Gleichung zwischen Elementen von N ersetzt, fehlschlägt.

Satz 78 Für alle geschlossenen $\mathcal{L}_p^F$-Terme t und s ist die Theorie

$$\mathsf{FPA} + (\forall x.\mathsf{N}(x)) + (\forall x.\mathsf{T}(x) \leftrightarrow t\, x = s)$$

inkonsistent.

Beweis: Da sich in dieser Theorie die Formel $\mathsf{T}(x)$ durch eine Gleichung zwischen natürlichen Zahlen ersetzen läßt, können wir eine Inkonsistenz durch Diagonalisieren der negierten Existenz mit Hilfe von $\mathsf{d_N}$ herleiten. Dazu sei

$$f\, x :\equiv \mathsf{d_N}\,(\lambda y.0)\,(\lambda y.\mathsf{not_N})\,(t\,(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow} f)))\, s\, 0,$$

d.h. f erfüllt die Bedingung

$$f\, x \simeq \begin{cases} 0 & \text{falls } t\,(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow} f)) = s, \\ \mathsf{not_N} & \text{falls } t\,(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow} f)) \neq s. \end{cases}$$

f ist offensichtlich eine konstante Funktion, da x auf der rechten Seite der Definition nicht auftritt. Durch Fallunterscheidung nach $\neg(f\,0\downarrow)$ und $f\,0\downarrow$ bekommen wir:

$$\begin{array}{rcl}
\neg(f\,0\downarrow) & \to & \neg(\mathsf{val}\,f\downarrow) \\
& \to & \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,f)) \\
& \to & t\,(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,f)) = s \\
& \to & f\,0 = 0 \\
& \to & f\,0\downarrow. \\
f\,0\downarrow & \to & \mathsf{val}\,f\downarrow \\
& \to & \mathsf{T}(\dot{\downarrow}\,f) \\
& \to & \neg\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,f)) \\
& \to & \neg t\,(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,f)) = s.
\end{array}$$

Nun folgt mit $f\,0 = \mathsf{d_N}\,(\lambda y.0)\,(\lambda y.\mathsf{s_N}\,(f\,x))\,(t\,(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,f)))\,s\,0$, $f\,0\downarrow$ und Striktheit, daß $t\,(\dot{\neg}\,(\dot{\downarrow}\,f))\downarrow$ und $s\downarrow$ gilt. Damit erhalten wir $f\,0 = \mathsf{not_N}$ nach Definition von f, im Widerspruch zu $\forall x.\mathsf{N}(x)$. $\Box$

Da wir im allgemeinen Fall nur sehr wenig funktionale Struktur auf Propositionen haben, vermuten wir, daß $\forall x.\mathsf{P}(x)$ mit FPA konsistent ist. Allerdings zeigt Satz 78, daß diese Theorie keine einfache rekursionstheoretische Interpretation besitzen kann.

2.2.7 Scheme-Ströme

Wie in Bemerkung 15 angesprochen, hat Stärk in [Stä9x] einen Zusammenhang zwischen der funktionalen Programmiersprache SCHEME und applikativen Theorien dargestellt. Wir zeigen nun, wie sich das SCHEME-Konzept von *Strömen*, das den rein funktionalen Rahmen verläßt, mit Hilfe unserer Zeiger behandeln läßt. Für eine Darstellung der Programmiersprache SCHEME verweisen wir auf [CR91] und [AS85].

Aufgrund besonders eleganter Programmiereigenschaften hat man SCHEME um das Konzept von Strömen erweitert (s. [AS85, Abs. 3.4]). Konzeptionell sind Ströme Sequenzen von Daten, die sich, solange man endliche Sequenzen betrachtet, durch SCHEME-Listen definieren ließen. Dabei würde man die Sequenzen mit Hilfe der SCHEME-Listenkonstruktionsfunktion `cons` zusammensetzen, so daß die Sequenz $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ durch `(cons` a_1 `(cons` a_2 `...` `(cons` a_n `NIL)...))` gegeben wäre. Da SCHEME einer strikten Auswertungsstrategie folgt, würden in diesem Fall bei einem Zugriff auf ein beliebiges Element der Sequenz, zum Beispiel auf das erste, alle n Elemente evaluiert, was erhebliche Effizienzeinbußen zur Folge hätte. Will man sogar unendliche Ströme betrachten, so kommt die Verwendung von Listen erst gar nicht in Frage.

Ziel ist es also, eine Repräsentation zu finden, bei der man die Elemente eines Stromes erst dann auswertet, wenn sie wirklich benötigt werden. In SCHEME wird dafür eine neue Kategorie von Objekten, sogenannte Versprechungen („promises") eingeführt, die durch die Routine `delay` generiert werden können. Eingelöst werden diese Versprechungen durch den Aufruf von `force`, d.h. in dem Ausdruck `(delay` a`)` wird die Auswertung von a verzögert bis zu einem Aufruf von `(force (delay` a`))`. Nun definiert man die Stromkonstruktionsfunktion `(cons-stream` a b`)` als Abkürzung für `(cons` a `(delay` b`))` und kann somit `head` und `tail` als SCHEME-Prozeduren definieren:

```
(define (head stream) (car stream))
(define (tail stream) (force (cdr stream)))
```

Da `cons-stream` und ebenso `delay` offensichtlich nicht strikt sein dürfen, wenn das zweite Argument b nicht vorzeitig ausgewertet werden soll, handelt es sich hierbei nicht um SCHEME-Prozeduren, sondern um spezielle Funktionen, die auf der Syntaxebene operieren (vgl. [AS85, Fußnote 34, S. 262]). Dort aber läßt sich `(delay` a`)` einfach als Abkürzung für die argumentlose Funktion `(lambda ()` a`)` betrachten. `force` ist dann nichts anderes als die Auswertung einer argumentlosen Funktion und wird definiert über `(define (force` a`) (`a`))` (s. [AS85, S. 264], [CR91]).

Modelliert man nun argumentlose Funktionen von SCHEME in applikativen Theorien durch konstante, einstellige Funktionen, wird `delay` offensichtlich genau durch unsere Operation $t \mapsto \bar{t}$ wiedergegeben und `force` entspricht der Funktion val. Die Versprechungen sind demnach die Zeiger, wie wir sie für FPA eingeführt haben. Damit läßt sich `(cons-stream` a b`)` $\equiv$ `(cons` a `(delay` b`))` als $\mathsf{p}\, a\, \lambda x.b$ mit $x \notin \mathrm{FV}(b)$ wiedergeben und wir können `head` mit $\lambda x.\mathsf{p}_0\, x$ und `tail` mit $\lambda x.\mathsf{val}\,(\mathsf{p}_1\, x)$ übersetzen.

Mit dieser Analogie lassen sich also SCHEME-Ströme recht kanonisch in applikativen Theorien repräsentieren, so zum Beispiel der (unendliche) Strom der Fibonacci-Zahlen, der sich in SCHEME wie folgt einführen läßt (s. [AS85, S. 267]):

```
(define (fibgen a b)
   (cons-stream a (fibgen b (+ a b))))
(define fibs (fibgen 0 1))
```

Unsere Übersetzung in applikative Theorien ergibt dafür:

$$\begin{aligned} \mathsf{fibgen}\, x\, y &:\equiv \mathsf{p}\, x\, (\lambda z.\mathsf{fibgen}\, y\, (\mathsf{plus}\, x\, y)), \\ \mathsf{fibs} &:\equiv \mathsf{fibgen}\, 0\, 1. \end{aligned}$$

Würde man bei der Definition von fibgen die λ-Abstraktion über die neue Variable z weglassen, hätte man eine nicht terminierende Rekursion, und man könnte im partiellen Kontext nicht beweisen, daß fibs existiert.

Bemerkung 79

1. In SCHEME werden innerhalb eines Programms mehrere Vorkommnisse eines Ausdruckes `(force (delay` a`))` nur einmal ausgewertet, was zusätzliche Effizienzvorteile hat. Auf diesen Aspekt von `force` ist hier nicht eingegangen worden, da er mit der Speicherorganisation von SCHEME zusammenhängt.

2. Das Konzept von Strömen in SCHEME erlaubt keine Behandlung von Strömen mit Löchern („gaps“), da beim Zugriff auf das $(n+1)$-te Element eines Stromes s mittels `(head (tail`^{n} `s))` alle n vorhergehenden Elemente ausgewertet werden, d.h. sie müssen definiert sein.

2.3 Universen über Frege-Strukturen

Universen sind als natürliche Erweiterungen formaler Systeme aus der Martin-Löfs Typentheorie sehr gut bekannt. Dort werden sie als Mengen mit natürlichen Abschlußeigenschaften eingeführt (s. [ML84]). Im Kontext applikativer Theorien sind Universen zuerst von Feferman in [Fef82] eingeführt worden. Analog dazu werden sie von Marzetta in [Mar93, Mar94] in der Theorie UTN über der Theorie EET definiert, wobei die Existenz von Universen durch ein *Limesaxiom* gesichert wird. Dieser Ansatz geht aus der Analogie von Universen mit *zulässigen Mengen* („admissibles“) in der Kripke-Platek-Mengenlehre hervor (s. [Jäg84]). Wir werden in diesem Abschnitt Frege-Strukturen in ganz ähnlicher Weise um Universen erweitern, wobei die mengentheoretischen Abschlußbedingungen hier durch die Abschlußbedingungen des Wahrheitsprädikats T ersetzt werden. Diese Universen sind verwandt mit den „levels of truth“, die Cantini in seiner Theorie TLR in [Can96, Ch. 8] einführt. Diese Theorie basiert auch auf Frege-Strukturen, bei ihrer Formulierung wird aber eine zusätzliche Sorte von Variablen für die Schichten benötigt. Mit unserem Konzept von Universen bleiben wir im applikativen Rahmen und erhalten Theorien, die einfache Einbettungen von transfinit iterierten Fixpunkttheorien $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ erlauben.

2.3.1 Die Theorie FSU

Bevor wir die Theorie FSU definieren, führen wir noch einige Abkürzungen ein.

Zur Vereinfachung der Darstellung wollen wir auch auf Termebene bei zweistelligen Relationen und logischen Junktoren Infixnotation verwenden. Zudem verwenden wir Klammer- und Abkürzungskonventionen analog zu den Formeln, d.h. es gilt u.a.:

$$\begin{array}{rcl}
(t \mathbin{\dot{=}} s) & :\equiv & \dot{=}\, t\, s, \\
(t \mathbin{\dot{\wedge}} s) & :\equiv & \dot{\wedge}\, t\, s, \\
(t \mathbin{\dot{\vee}} s) & :\equiv & \dot{\neg}\,(\dot{\neg}\, t \mathbin{\dot{\wedge}} \dot{\neg}\, s), \\
(t \mathbin{\dot{\rightarrow}} s) & :\equiv & \dot{\neg}\, t \mathbin{\dot{\vee}} s, \\
(\dot{\forall} x.t) & :\equiv & \dot{\forall}\,(\lambda x.t), \\
(\dot{\exists} x.t) & :\equiv & \dot{\neg}\,(\dot{\forall} x.\dot{\neg}\, t).
\end{array}$$

Neben Klassen werden wir im folgenden auch *Wahrheitsfunktionen* betrachten, d.h. Funktionen, die für alle Argumente wahre oder falsche Werte liefern, die aber nicht notwendig konsistent sein müssen. Zusätzlich definieren wir eine Ordnungsrelation

$f \sqsubset g$, durch die sich mittels g der T-Wertverlauf von f bestimmen läßt. Als letztes führen wir noch eine Abkürzung für extensionale Gleichheit ein.

Definition 80

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tf}(f) \;&:\Leftrightarrow\; \forall x.\mathsf{T}(f\,x) \vee \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(f\,x)),\\
f \sqsubset g \;&:\Leftrightarrow\; \forall x.(\mathsf{T}(f\,x) \to \mathsf{T}(g\,(f\,x))) \wedge (\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(f\,x)) \to \mathsf{T}(g\,(\dot{\neg}\,(f\,x)))),\\
f \equiv g \;&:\Leftrightarrow\; \forall x.\mathsf{T}(f\,x) \leftrightarrow \mathsf{T}(g\,x).
\end{aligned}$$

Gilt $f \sqsubset g$, sprechen wir auch davon, daß g *über* f liegt. Nennen wir Aussagen der Form $\mathsf{T}(f\,t)$ *f-positiv* und $\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(f\,t))$ *f-negativ*, so können wir mit $f \sqsubset g$ f-negative Aussagen in g-positive übersetzen. Ist g weiter ein Universum in dem unten axiomatisierten Sinn, gilt zusätzlich $\mathsf{T}(g\,x) \to \mathsf{T}(x)$, d.h. mit $f \sqsubset g$ folgt $\mathsf{T}(f\,x) \leftrightarrow \mathsf{T}(g\,(f\,x))$ und $\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(f\,x)) \leftrightarrow \mathsf{T}(g\,(\dot{\neg}\,(f\,x)))$, und wir können davon sprechen, daß $f\,x$ wahr bzw. falsch ist, wenn es *im Universum g wahr* bzw. *falsch* ist.

Nun formulieren wir die Theorie FSU (Frege-Strukturen mit Universen) in der Sprache $\mathcal{L}_U$, die $\mathcal{L}_F$ erweitert um

- die Individuenkonstante lim und
- das Relationssymbol U.

Die Axiome von FSU umfassen die von TON, ausgedehnt auf die erweiterte Sprache, und die folgenden:

I. **Grundaxiome**

(1) $\mathsf{U}(u) \to \mathsf{C}(u)$,

(2) $\mathsf{U}(u) \to \forall x.\mathsf{T}(u\,x) \to \mathsf{T}(x)$.

II. **Abschluß unter Primformeln von TON**

(3) $\mathsf{U}(u) \to \forall x, y.x = y \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(x \doteq y))$,

(4) $\mathsf{U}(u) \to \forall x, y.x \neq y \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,(x \doteq y)))$,

(5) $\mathsf{U}(u) \to \forall x.\mathsf{N}(x) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot{\mathsf{N}}\,x))$,

(6) $\mathsf{U}(u) \to \forall x.\neg\mathsf{N}(x) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,(\dot{\mathsf{N}}\,x)))$.

III. **Abschluß unter zusammengesetzten Formeln**

(7) $\mathsf{U}(u) \to \forall x.\mathsf{T}(u\,x) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,(\dot{\neg}\,x)))$,

(8) $\mathsf{U}(u) \to \forall x, y.\mathsf{T}(u\,x) \wedge \mathsf{T}(u\,y) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(x \mathbin{\dot{\wedge}} y))$,

(9) $\mathsf{U}(u) \to \forall x, y.\mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,x)) \vee \mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,y)) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,(x \mathbin{\dot{\wedge}} y)))$,

(10) $\mathsf{U}(u) \to ((\forall x.\mathsf{T}(u\,(f\,x))) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot{\forall}\,f)))$,

(11) $\mathsf{U}(u) \to ((\exists x.\mathsf{T}(u\,(\dot\neg\,(f\,x)))) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot\neg\,(\dot\forall\, f))))$.

IV. **(schwacher) Abschluß unter** T

(12) $\mathsf{U}(u) \to \forall x.\mathsf{T}(u\,x) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot{\mathsf{T}}\,x))$,

(13) $\mathsf{U}(u) \to \forall x.\mathsf{T}(u\,(\dot\neg\,x)) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot\neg\,(\dot{\mathsf{T}}\,x)))$.

V. **Ordnungsstruktur**

(14) $\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{U}(v) \wedge u \sqsubset v \to \forall x.\mathsf{T}(u\,x) \to \mathsf{T}(v\,x)$,

(15) $\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{U}(v) \to u \sqsubset v \vee u \equiv v \vee v \sqsubset u$,

(16) $\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{U}(v) \wedge (u \equiv v \vee v \sqsubset u) \to \forall x.\neg\mathsf{T}(v\,(u\,x)) \wedge \neg\mathsf{T}(v\,(\dot\neg\,(u\,x)))$.

VI. **Limes**

(17) $\forall f.\mathsf{Tf}(f) \to \mathsf{U}(\mathsf{lim}\,f) \wedge f \sqsubset \mathsf{lim}\,f$.

In den Grundaxiomen fordern wir zuerst, daß Universen Klassen sind, d.h. sie sind total und konsistent, in dem Sinne, daß sowohl $\forall x.\mathsf{T}(u\,x) \vee \mathsf{T}(\dot\neg\,(u\,x))$ als auch $\forall x.\neg(\mathsf{T}(u\,x) \wedge \mathsf{T}(\dot\neg\,(u\,x))$ gilt. Man beachte, daß sich damit die Negation an T vorbei vor u ziehen läßt, aber nicht weiter an u vorbei, d.h. im allgemeinen gilt nicht $\mathsf{T}(\dot\neg\,(u\,x)) \leftrightarrow \mathsf{T}(u\,(\dot\neg\,x))$.

Das zweite Axiom besagt, daß die Elemente von Universen wahr sind. Zusammen mit den Abschlußeigenschaften ergibt sich daraus, daß man Formeln der Form $\mathsf{T}(u\,\cdot)$ mit $\mathsf{U}(u)$ als „truth levels" im üblichen Sinne (vgl. z.B. [Can96, JKSS9x]) ansehen kann.

Aus den Ordnungsaxiomen folgt, daß die Universen durch $\sqsubset$ linear geordnet sind. Dabei fordern wir die Totalität in V.(15) und erhalten die Irreflexivität aus V.(16). Für die Transitivität seien Universen u, v und w mit $u \sqsubset v$ und $v \sqsubset w$ gegeben. Aus $\mathsf{T}(u\,x)$ folgt dann $\mathsf{T}(v\,(u\,x))$ und mit V.(14) auch $\mathsf{T}(w\,(u\,x))$. Für negative Aussagen über u geht das Argument analog, d.h. wir erhalten $u \sqsubset w$.

Erst das Limesaxiom garantiert überhaupt die Existenz von Universen, wobei wir *uniform* für jede Wahrheitsfunktion ein darüberliegendes Universum erhalten. Dieses Axiom ist Marzettas Theorie UTN [Mar94, S.71ff] entlehnt, das dort allerdings in einer nichtuniformen Fassung eingeführt ist (s. Abs. 2.3.5).

Aus Axiom I.(2) und Limes folgt nun, daß ein Term wahr ist, wenn er in einem Universum wahr ist:

Lemma 81 $\mathsf{FSU} \vdash \mathsf{T}(x) \leftrightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{T}(u\,x)$.

Beweis: Die Richtung von rechts nach links ist Axiom I.(2). Für die andere Richtung folgt mit $\mathsf{T}(x)$, daß $\lambda y.x$ eine Wahrheitsfunktion ist. D.h. wir können das Limesaxiom anwenden und erhalten $\exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \lambda y.x \sqsubset u$. Aus der Definition von $\sqsubset$ und $\mathsf{T}(x)$ folgt daraus $\mathsf{T}(u\,x)$. □

Mit Hilfe dieses Lemmas und einer weiteren Verwendung des Limesaxioms folgt, daß FON in FSU enthalten ist.

Satz 82 Sei φ eine $\mathcal{L}_F$-Formel. Dann gilt:

$$\mathsf{FON} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU} \vdash \varphi.$$

Beweis: Die Aussage folgt mit Herleitungsinduktion, wobei wir nur die folgenden Axiome von FON prüfen müssen:

I. Abschluß unter Primformeln von TON.

Diese Axiome folgen mit dem Abschluß der Universen unter Primformeln von TON und dem vorhergehenden Lemma.

II. Abschluß unter zusammengesetzten Formeln.

Auch die Axiome II.(5) bis II.(7) von FON folgen mit Lemma 81 und den entsprechenden Axiomen von FSU. Wir zeigen das kurz für II.(5):

$$\begin{aligned} \mathsf{T}(x) &\leftrightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{T}(u\,x) \\ &\leftrightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,(\dot{\neg}\,x))) \\ &\leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\neg}\,x)). \end{aligned}$$

Bei den Axiomen für $\dot{\forall}$ benötigen wir allerdings das Limesaxiom:

$$\begin{aligned} \forall x.\mathsf{T}(f\,x) &\rightarrow \mathsf{Tf}(\lambda x.(f\,x)) \wedge \forall x.\mathsf{T}(f\,x) \\ &\rightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge (\lambda x.(f\,x)) \sqsubset u \wedge \forall x.\mathsf{T}(f\,x) \\ &\rightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \forall x.(\mathsf{T}(f\,x) \rightarrow \mathsf{T}(u\,(f\,x))) \wedge \mathsf{T}(f\,x) \\ &\rightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \forall x.\mathsf{T}(u\,(f\,x)) \\ &\rightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{T}(u\,(\dot{\forall}\,f)) \\ &\rightarrow \mathsf{T}(\dot{\forall}\,f). \end{aligned}$$

Für die Gegenrichtung erhalten wir mit Lemma 81:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}(\dot{\forall}\,f) &\rightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{T}(u\,(\dot{\forall}\,f)) \\ &\rightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \forall x.\mathsf{T}(u\,(f\,x)) \\ &\rightarrow \forall x.\exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{T}(u\,(f\,x)) \\ &\rightarrow \forall x.\mathsf{T}(f\,x)). \end{aligned}$$

Im negativen Fall folgt:

$$\begin{aligned} \exists x.\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(f\,x)) &\leftrightarrow \exists x, u.\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,(f\,x))) \\ &\leftrightarrow \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,(\dot{\forall}\,f))) \\ &\leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\forall}\,f)). \end{aligned}$$

III. Selbstreferenz. Diese Axiome folgen wieder mit Lemma 81 und dem (schwachen) Abschluß von FSU unter T. $\square$

2.3.2 Einbettung von $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ in FSU-Theorien

Wir betten nun Theorien transfinit iterierter Fixpunkte in Frege-Strukturen mit Universen ein. Dabei geht es uns auch darum, die enge Beziehung zwischen diesen Fixpunkttheorien und den Universen darzustellen. Dementsprechend definieren wir uns Hilfstheorien FSU_α ohne Limesaxiom, in denen explizit die Existenz von α-vielen Universen gefordert wird und die sich leicht mit $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ in Beziehung setzen lassen. In einem zweiten Schritt zeigen wir dann, mit welcher Induktionsform sich die Existenz von wievielen Universen beweisen läßt.

Ordinalzahlen

Für die Formulierung der Theorien $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ und FSU_α benötigen wir Ordinalzahlen. Dazu wählen wir eine primitiv-rekursive Standardwohlordnung $\prec$ vom Ordnungstyp ε_0, die in der üblichen Weise durch natürliche Zahlen kodiert sei (s. z.B. [Sch77]). Für diese Kodierungen lassen sich nun Ordinalzahloperationen (Addition, Multiplikation und Exponentiation) definieren, wobei wir nicht explizit zwischen Ordinalzahlen und ihren Bezeichnungen unterscheiden. Wir benutzen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als Variablen für Ordinalzahl(bezeichnung)en und geben eine von außen vorgegebene Ordinalzahl α in einer Theorie mit $\overline{\alpha}$ wieder.

Für die Definition von Frege-Strukturen mit α-vielen Universen kann man sich überlegen, daß sich bereits in $\mathsf{TON} + (\text{S-I}_\mathsf{N})$ ein entsprechendes Ordinalzahlbezeichnungssystem einführen läßt (Cantini führt ein solches für Ordinalzahlen $< \Gamma_0$ in [Can96, §45] im einzelnen aus). Auch hier verwenden wir zur Vereinfachung der Notation $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als Variablen für diese Ordinalterme, sowie $\alpha \preceq \beta$, $\alpha \prec \beta$ und $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$, α^β für die entsprechenden Ordnungsrelationen und Operationen. Wie üblich steht $\forall \alpha \prec \beta . \varphi$ für $\forall \alpha . \alpha \prec \beta \rightarrow \varphi$ und $\exists \alpha \prec \beta . \varphi$ für $\exists \alpha . \alpha \prec \beta \wedge \varphi$. Wir benötigen in FSU auch transfinite Induktion entlang $\prec$. Dafür setzen wir:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Prog}(\varphi) &:\Leftrightarrow \quad \forall \gamma . (\forall \beta \prec \gamma . \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\gamma), \\
\mathrm{TI}(\alpha, \varphi) &:\Leftrightarrow \quad \mathrm{Prog}(\varphi) \rightarrow \forall \beta \prec \alpha . \varphi(\alpha).
\end{aligned}
$$

Dann erhält man durch Adaption entsprechender Beweise aus der Arithmetik in FSU (s. z.B. [Sch77, Can89, JS96] und für entsprechende Beweise in FON [Can96, §46]):

Satz 83

1. Für alle Ordinalzahlen $\alpha < \omega^\omega$ gilt:

$$\mathsf{FSU} + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N}) \vdash \mathrm{TI}(\overline{\alpha}, \mathsf{T}(f \cdot)).$$

2. Für alle Ordinalzahlen $\alpha < \varepsilon_0$ und alle $\mathcal{L}_U$-Formeln φ gilt:

$$\mathsf{FSU} + (\text{F-I}_\mathsf{N}) \vdash \mathrm{TI}(\overline{\alpha}, \varphi).$$

Bei $(\mathsf{T}\text{-}\mathsf{I}_{\mathsf{N}})$ wird die transfinite Induktion bis ω^k $(k \in I\!N)$ mit Metainduktion über k bewiesen. Im Induktionsschritt von k auf $k+1$ benötigt man dabei Induktion (innerhalb von $\mathsf{FSU}+(\mathsf{T}\text{-}\mathsf{I}_{\mathsf{N}})$) für die Aussage $\forall y : \mathsf{N}.\forall x \preceq \overline{\omega}^k \cdot y.\mathsf{T}(f\,x)$ (s. [JS96]), die sich als eine Formel $\mathsf{T}(g\,y)$ schreiben läßt. Dementsprechend ist auch die transfinite Induktion auf Formeln der Gestalt $\mathsf{T}(f\,x)$ eingeschränkt.

Transfinit iterierte Fixpunkttheorien

Die Theorien $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ (s. [JKSS9x]) formulieren wir in der Sprache $\mathcal{L}_1(FP')$, für die wir die Sprache $\mathcal{L}_1$ von PA um Prädikatkonstanten $\mathcal{P}^\varphi$ für jede induktive Operatorform $\varphi(P, Q, x, y)$, d.h. $\mathcal{L}_1$-Formel, in der $P(t)$ nur positiv, $Q(s)$ aber positiv und negativ auftreten darf, erweitern. Nun sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine primitiv-rekursive Paarfunktion mit Projektion $(\cdot)_0$ und $(\cdot)_1$. Damit schreiben wir als Abkürzungen $\mathcal{P}^\varphi_s(t)$ für $\mathcal{P}^\varphi(\langle t, s\rangle)$ und $\mathcal{P}^\varphi_{\prec s}(t)$ für $t = \langle (t)_0, (t)_1\rangle \wedge (t)_1 \prec s \wedge \mathcal{P}^\varphi(t)$.

Die Axiome von $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ für $\alpha < \varepsilon_0$ sind die von PA mit vollständiger Induktion für alle $\mathcal{L}_1(FP')$-Formeln sowie den Fixpunktaxiomen

$$\forall \beta \prec \overline{\alpha}.\forall x.\mathcal{P}^\varphi_\beta(x) \leftrightarrow \varphi(\mathcal{P}^\varphi_\beta, \mathcal{P}^\varphi_{\prec\beta}, x, \beta)$$

für alle induktiven Operatorformen $\varphi(P, Q, x, y)$.

$\widehat{\mathsf{ID}}_{<\alpha}$ ist die Vereinigung der Theorien $\widehat{\mathsf{ID}}_\beta$ mit $\beta < \alpha \le \varepsilon_0$.

Frege-Strukturen mit transfinit vielen Universen

Wir führen nun Theorien FSU_α für $\alpha < \varepsilon_0$ ein, in denen die Existenz von α-vielen übereinanderliegenden Universen direkt axiomatisiert wird. Diese Theorien sind in der Sprache $\mathcal{L}_{U'}$ formuliert, die $\mathcal{L}_U$ entspricht, wobei die Individuenkonstante lim durch die Konstante u ersetzt wird. Bezeichnen wir mit FSU^- die Theorie FSU ohne das Limesaxiom VI.(17) (s. S. 52), so ist FSU_α die Theorie FSU^- erweitert um das Axiom

(Univ_α) $\forall \beta \prec \overline{\alpha}.\mathsf{U}(\mathsf{u}\,\beta) \wedge \forall \gamma \prec \beta.\mathsf{u}\,\gamma \sqsubset \mathsf{u}\,\beta.$

$\mathsf{FSU}_{<\alpha}$ ist die Vereinigung der Theorien FSU_β mit $\beta < \alpha \le \varepsilon_0$.

Einbettung der Fixpunkttheorien in Frege-Strukturen

Wie bei der Einbettung von $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ in $\mathsf{FON} + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ wollen wir die Fixpunkte der induktiven Operatorformen φ mit Hilfe des rekursionstheoretischen Fixpunktes von $\dot\varphi$ interpretieren. Für die genaue Definition müssen wir dazu die Vorkommnisse von $P(t)$ und $Q(s)$ in $\varphi(P, Q, x, y)$ geeignet ersetzen. Dabei können wir die Paarfunktion und die Projektionen von $\mathcal{L}_1$ durch die entsprechenden auf N operierenden Funktionen von TON interpretieren (s. Bem. 18), wobei sich im folgenden aus dem Kontext ergibt, ob $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(\cdot)_0$ und $(\cdot)_1$ zu $\mathcal{L}_1$ oder $\mathcal{L}_t$ gehören. Nun wählen wir neue Variablen

p und z, die in φ nicht auftreten, und ersetzen x durch $(z)_0$, y durch $(z)_1$, $P(t)$ durch $\mathsf{T}(p\,\langle\, t^N, (z)_1\rangle)$, und schließlich $Q(s)$ durch $\mathsf{T}(\mathsf{q}\,p\,s^N\,(z)_1)$ mit

$$\mathsf{q} :\equiv \lambda p, x, y.x \dot{=} \langle (x)_0, (x)_1\rangle \,\dot{\wedge} (x)_1 \dot{\prec} y \,\dot{\wedge} (\mathsf{u}\,(x)_1\,(p\,x)).$$

$\mathsf{T}(\mathsf{q}\,p\,x\,\beta)$ hat damit die Gestalt $\mathsf{T}(x \dot{=} \langle (x)_0, (x)_1\rangle \,\dot{\wedge} (x)_1 \dot{\prec} \beta \,\dot{\wedge} (\mathsf{u}\,(x)_1\,(p\,x)))$ und kann bei der unten gewählten Interpretation für die Fixpunkte $\mathcal{P}^{\varphi}_{\prec\beta}(x)$, die Abkürzungen für $x = \langle (x)_0, (x)_1\rangle \wedge (x)_1 \prec \beta \wedge \mathcal{P}^{\varphi}(x)$ sind, verwendet werden (s. Lemma 84).

Nun definieren wir analog zur Interpretation von $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ in $\mathsf{FON}+(\text{F-I}_{\mathsf{N}})$ den rekursionstheoretischen Fixpunkt von $\dot{\varphi}^N$:

$$p_\varphi \;:\equiv\; \mathsf{rec}\,(\lambda p, z.\overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p\,\langle\cdot, (z)_1\rangle), \mathsf{T}(\mathsf{q}\,p\,\cdot\,(z)_1), (z)_0, (z)_1)}^{\cdot}).$$

und erhalten:

$$p_\varphi\,\langle x, \beta\rangle = \overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p_\varphi\,\langle\cdot, \beta\rangle), \mathsf{T}(\mathsf{q}\,p_\varphi\,\cdot\,\beta), x, \beta)}^{\cdot}.$$

Für eine gegebene Fixpunkttheorie $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ interpretieren wir die Fixpunktkonstanten wie folgt:

$$\mathcal{P}^{\varphi}(t)^N :\Leftrightarrow (t^N)_1 \prec \overline{\alpha} \wedge \mathsf{T}(\mathsf{u}\,(t^N)_1\,(p_\varphi\,t^N)).$$

Wir beweisen nun, daß sich die Fixpunkte einer Schicht β bei dieser Interpretation im Universum $\mathsf{u}\,\beta$ durch einen Term repräsentieren lassen.

Lemma 84

1. $\mathsf{FSU}_\alpha \vdash \forall\beta \prec \overline{\alpha}.\mathcal{P}^{\varphi}_{\beta}(t)^N \leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\mathsf{T}}\,(p_\varphi\,\langle t^N, \beta\rangle)))$,
2. $\mathsf{FSU}_\alpha \vdash \forall\beta \prec \overline{\alpha}.\mathcal{P}^{\varphi}_{\prec\beta}(s)^N \leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\mathsf{T}}\,(\mathsf{q}\,p_\varphi\,s^N\,\beta)))$,
3. $\mathsf{FSU}_\alpha \vdash \forall\beta \prec \overline{\alpha}.\neg\mathcal{P}^{\varphi}_{\prec\beta}(s)^N \leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\neg}\,(\dot{\mathsf{T}}\,(\mathsf{q}\,p_\varphi\,s^N\,\beta))))$.

Beweis: In allen drei Fällen folgt aus $\beta \prec \overline{\alpha}$ sofort $\mathsf{U}(\mathsf{u}\,\beta)$.

1. Die erste Aussage ergibt sich aus der Definition von $\mathcal{P}^{\varphi}(t)^N$ und dem Abschluß von $\mathsf{u}\,\beta$ unter T.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\varphi}_{\beta}(t)^N &\leftrightarrow \beta \prec \overline{\alpha} \wedge \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(p_\varphi\,\langle t^N, \beta\rangle)) \\ &\leftrightarrow \beta \prec \overline{\alpha} \wedge \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\mathsf{T}}\,(p_\varphi\,\langle t^N, \beta\rangle))). \end{aligned}$$

2. Für die zweite Behauptung nutzen wir neben den Abschlußbedingungen von $\mathsf{u}\,\beta$ auch $\mathsf{u}\,(s^N)_1 \sqsubset \mathsf{u}\,\beta$ für $(s^N)_1 \prec \beta \prec \overline{\alpha}$ aus:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}^{\varphi}_{\prec\beta}(s)^N \\ \leftrightarrow\;& s^N = \langle (s^N)_0, (s^N)_1\rangle \wedge (s^N)_1 \prec \beta \wedge \mathcal{P}^{\varphi}(s)^N \\ \leftrightarrow\;& s^N = \langle (s^N)_0, (s^N)_1\rangle \wedge (s^N)_1 \prec \beta \wedge (s^N)_1 \prec \overline{\alpha} \wedge \mathsf{T}(\mathsf{u}\,(s^N)_1\,(p_\varphi\,s^N)) \\ \leftrightarrow\;& s^N = \langle (s^N)_0, (s^N)_1\rangle \wedge (s^N)_1 \prec \beta \wedge \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\mathsf{u}\,(s^N)_1\,(p_\varphi\,s^N))) \\ \leftrightarrow\;& \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\mathsf{T}}\,(s^N \dot{=} \langle (s^N)_0, (s^N)_1\rangle \,\dot{\wedge} (s^N)_1 \dot{\prec} \beta \,\dot{\wedge} (\mathsf{u}\,(s^N)_1\,(p_\varphi\,s^N))))) \\ \leftrightarrow\;& \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\mathsf{T}}\,(\mathsf{q}\,p_\varphi\,s^N\,\beta))). \end{aligned}$$

3. Die dritte Behauptung folgt analog zur zweiten, wobei wir ausnutzen, daß sich mit $\mathsf{u}\,(s^N)_1 \sqsubset \mathsf{u}\,\beta$ eine „$\mathsf{u}\,(s^N)_1$-negative“ Aussage in eine „$\mathsf{u}\,\beta$-positive“ umschreiben läßt.

$$\begin{array}{ll} & \neg\mathcal{P}^{\varphi}_{\prec\beta}(s)^N \\ \leftrightarrow & s^N \neq \langle (s^N)_0, (s^N)_1\rangle \vee \neg(s^N)_1 \prec \beta \vee \neg\mathcal{P}^{\varphi}(s)^N \\ \leftrightarrow & s^N \neq \langle (s^N)_0, (s^N)_1\rangle \vee \neg(s^N)_1 \prec \beta \vee \neg(s^N)_1 \prec \overline{\alpha} \vee \neg\mathsf{T}(\mathsf{u}\,(s^N)_1\,(p_\varphi\, s^N)) \\ \leftrightarrow & s^N \neq \langle (s^N)_0, (s^N)_1\rangle \vee \neg(s^N)_1 \prec \beta \vee \neg(s^N)_1 \prec \overline{\alpha} \vee \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}\,(s^N)_1\,(p_\varphi\, s^N))) \\ \leftrightarrow & s^N \neq \langle (s^N)_0, (s^N)_1\rangle \vee \neg(s^N)_1 \prec \beta \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}\,(s^N)_1\,(p_\varphi\, s^N)))) \\ \leftrightarrow & \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\neg}\,(\dot{\mathsf{T}}\,(s^N \doteq \langle (s^N)_0, (s^N)_1\rangle\,\dot{\wedge}(s^N)_1 \mathrel{\dot{\prec}} \beta\,\dot{\wedge}(\mathsf{u}\,(s^N)_1\,(p_\varphi\, s^N)))))) \\ \leftrightarrow & \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\neg}\,(\dot{\mathsf{T}}\,(\mathsf{q}\,p_\varphi\, s^N\,\beta)))). \end{array} \qquad \square$$

Nun gilt:

Satz 85 $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU}_{\alpha+1} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^N.$

Beweis: Wir zeigen zuerst das Fixpunktaxiom. Dazu nehmen wir $\beta \prec \overline{\alpha}$ an und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}^{\varphi}_{\beta}(x)^N & \leftrightarrow & \beta \prec \overline{\alpha} \wedge \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(p_\varphi\,\langle x^N, \beta\rangle)) \\ & \leftrightarrow & \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\overbrace{\varphi^N(\mathsf{T}(p_\varphi\,\langle \cdot, \beta\rangle), \mathsf{T}(\mathsf{q}\,p_\varphi\,\cdot\,\beta), x^N, \beta)}^{\cdot})) \\ & \leftrightarrow & (\varphi(\mathcal{P}^{\varphi}_{\beta}, \mathcal{P}^{\varphi}_{\prec\beta}, x, \beta))^N, \end{array}$$

wobei sich die letzte Äquivalenz aus den Abschlußeigenschaften von $\mathsf{u}\,\beta$ und aus Lemma 84 ergibt.

Bei der Verifikation der Formelinduktion von $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ geht das erste Konjunktionsglied der Interpretation der Fixpunktkonstanten ein: $\mathcal{P}^{\varphi}(t)$ wird übersetzt mit $(t^N)_1 \prec \overline{\alpha} \wedge \mathsf{T}(\mathsf{u}\,(t^N)_1\,(p_\varphi\, t^N))$. Damit gilt $\mathsf{u}\,(t^N)_1 \sqsubset \mathsf{u}\,\overline{\alpha}$, und $\mathcal{P}^{\varphi}(t)^N$ ist äquivalent zu $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,\overline{\alpha}\,((t^N)_1 \mathrel{\dot{\prec}} \overline{\alpha}\,\dot{\wedge}(\mathsf{u}\,(t^N)_1\,(p_\varphi\, t^N))))$. Für negatives Auftreten der Fixpunkte erhalten wir analog:

$$\begin{array}{rcl} \neg\mathcal{P}^{\varphi}(t)^N & \leftrightarrow & \neg(t)_1 \prec \overline{\alpha} \vee \neg\mathsf{T}(\mathsf{u}\,(t^N)_1\,(p_\varphi\, t^N)) \\ & \leftrightarrow & \neg(t^N)_1 \prec \overline{\alpha} \vee \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}\,(t^N)_1\,(p_\varphi\, t^N))) \\ & \leftrightarrow & \neg(t^N)_1 \prec \overline{\alpha} \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\overline{\alpha}\,(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}\,(t^N)_1\,(p_\varphi\, t^N)))) \\ & \leftrightarrow & \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\overline{\alpha}\,((\dot{\neg}\,((t^N)_1 \mathrel{\dot{\prec}} \overline{\alpha}))\,\dot{\vee}(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}\,(t^N)_1\,(p_\varphi\, t^N))))). \end{array}$$

Da $\mathsf{u}\,\overline{\alpha}$ in $\mathsf{FSU}_{\alpha+1}$ eine Klasse ist, läßt sich damit aufgrund der Abschlußbedingungen von $\mathsf{u}\,\overline{\alpha}$ jede Formel $\varphi(x)$ von $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ als eine Klasse im Sinne von $\mathsf{FSU}_{\alpha+1}$ schreiben. Somit läßt sich die Formelinduktion von $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ in $\mathsf{FSU}_{\alpha+1}$ mit $(\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ nachweisen. $\square$

Wenn man das erste Konjunktionsglied in der Interpretation der Fixpunktkonstanten wegläßt, kann man mit diesem Beweis $\widehat{\mathsf{ID}}_\alpha$ auch in $\mathsf{FSU}_\alpha + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ einbetten. Für Theorien $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\alpha}$ mit α Limeszahl erspart uns die direkte Einbettung in $\mathsf{FSU}_{\alpha+1}+(\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ einen Zwischenschritt und wir erhalten unmittelbar:

Korollar 86 Es sei α eine Limeszahl. Dann gilt:

$$\widehat{\mathsf{ID}}_{<\alpha} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU}_{<\alpha} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^N.$$

Untere Schranken für FSU-Theorien

Um nun die unteren Schranken von FSU-Theorien zu bestimmen, zeigen wir, daß sich FSU_α in $\mathsf{FSU} + \mathrm{TI}(\overline{\alpha}, \mathsf{T}(f\,\cdot))$ einbetten läßt. Dazu ordnen wir zuerst jeder Ordinalzahl γ einen Term $\mathsf{tf}\,\gamma$ zu, so daß sich für $\gamma \prec \overline{\alpha}$ mit $\mathrm{TI}(\overline{\alpha}, \mathsf{T}(f\,\cdot))$ beweisen läßt, daß er eine Wahrheitsfunktion ist. Dann können wir das Limesaxiom auf diese Wahrheitsfunktionen anwenden und erhalten Universen, die sich als Interpretation für die Universen aus FSU_α eignen.

Wir setzen $\mathsf{tf} :\equiv \mathsf{rec}\,\lambda f, y.(\lambda x.\dot{\exists}\delta \dot{\prec} y.\mathsf{lim}\,(f\,\delta)\,x)$ und $\mathsf{u}^* :\equiv \lambda y.\mathsf{lim}\,(\mathsf{tf}\,y)$. Damit erhält man:

$$\mathsf{tf}\,\beta = \lambda x.\dot{\exists}\delta \dot{\prec} \beta.\mathsf{u}^*\,\delta\,x.$$

Die Idee bei dieser Definition ist es, mit $\mathsf{tf}\,\beta$ eine Wahrheitsfunktion zu definieren, bei der $\mathsf{T}(\mathsf{tf}\,\beta\,x)$ gilt, falls x in einem Universum unterhalb von $\mathsf{u}\,\beta$ wahr ist. Kann man nun beweisen, daß $\mathsf{tf}\,\beta$ eine Wahrheitsfunktion ist, liefert der uniforme Limes das nächste Universum oberhalb von $\mathsf{tf}\,\beta$.

Lemma 87

$$\mathsf{FSU} + \mathrm{TI}(\overline{\alpha}, \mathsf{T}(f\,\cdot)) \vdash \forall\beta \prec \overline{\alpha}.\mathsf{U}(\mathsf{u}^*\,\beta) \land \forall\gamma \prec \beta.\mathsf{u}^*\,\gamma \sqsubset \mathsf{u}^*\,\beta.$$

Beweis: Wir beweisen zuerst mit transfiniter Induktion

$$\forall\beta \prec \overline{\alpha}.\mathsf{Tf}(\mathsf{tf}\,\beta),$$

wobei wir ausnutzen, daß sich $\mathsf{Tf}(\mathsf{tf}\,\beta)$ auch in der Form $\mathsf{T}(\dot{\forall} x.\mathsf{tf}\,\beta\,x \,\dot{\lor}\, \dot{\neg}\,(\mathsf{tf}\,\beta\,x))$ schreiben läßt. Um die Progressivität $\mathrm{Prog}(\mathsf{Tf}(\mathsf{tf}\,\cdot))$ zu zeigen, nehmen wir für ein beliebiges γ die Induktionsvoraussetzung an:

$$\forall\delta \prec \gamma.\mathsf{Tf}(\mathsf{tf}\,\delta).$$

Dann folgt mit dem Limesaxiom, daß $\mathsf{lim}\,\mathsf{tf}\,\delta = \mathsf{u}^*\,\delta$ ein Universum, also auch eine Wahrheitsfunktion ist, d.h.

$$\forall\delta \prec \gamma.\forall x.\mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\delta\,x) \lor \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}^*\,\delta\,x)).$$

Durch Quantorentausch erhalten wir

$$\forall x.\forall\delta \prec \gamma.\mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\delta\,x) \lor \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}^*\,\delta\,x)).$$

Daraus folgt

$$\forall x.(\exists\delta \prec \gamma.\mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\delta\,x)) \lor (\forall\delta \prec \gamma.\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}^*\,\delta\,x))),$$

und mit den Abschlußbedingungen für T erhalten wir

$$\forall x.\mathsf{T}(\dot{\exists}\delta \mathrel{\dot{\prec}} \gamma.\mathsf{u}^*\,\delta\,x) \vee \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\dot{\exists}\delta \mathrel{\dot{\prec}} \gamma.\mathsf{u}^*\,\delta\,x)),$$

d.h. $\mathsf{Tf}(\lambda x.\dot{\exists}\delta \mathrel{\dot{\prec}} \gamma.\mathsf{u}^*\,\delta\,x)$ bzw. $\mathsf{Tf}(\mathsf{tf}\,\gamma)$. Damit haben wir die Progressivität gezeigt, und $\mathrm{TI}(\overline{\alpha}, \mathsf{T}(f\,\cdot))$ liefert $\forall\beta \prec \overline{\alpha}.\mathsf{Tf}(\mathsf{tf}\,\beta)$. Mit dem Limesaxiom folgt daraus weiter $\forall\beta \prec \overline{\alpha}.\mathsf{U}(\mathsf{lim}\,(\mathsf{tf}\,\beta))$, d.h.

$$\forall\beta \prec \overline{\alpha}.\mathsf{U}(\mathsf{u}^*\,\beta).$$

Für den zweiten Teil der Behauptung können wir $\gamma \prec \beta \prec \overline{\alpha}$ voraussetzen. Nun nehmen wir zusätzlich $\neg\mathsf{u}^*\,\gamma \sqsubset \mathsf{u}^*\,\beta$ an. Dann folgt $\mathsf{u}^*\,\beta \sqsubset \mathsf{u}^*\,\gamma \vee \mathsf{u}^*\,\beta \equiv \mathsf{u}^*\,\gamma$ aus der linearen Ordnung der Universen. Mit $\mathsf{Tf}(\mathsf{tf}\,\beta)$ folgt $\mathsf{tf}\,\beta \sqsubset \mathsf{u}^*\,\beta$ und weiter $\mathsf{tf}\,\beta \sqsubset \mathsf{u}^*\,\gamma$. Damit erhalten wir aus der Definition von $\sqsubset$ für alle x:

$$\begin{array}{rl} & \mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\gamma\,(\mathsf{tf}\,\beta\,x)) \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\gamma\,(\dot{\neg}\,(\mathsf{tf}\,\beta\,x))) \\ \to & \mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\gamma\,(\dot{\exists}\delta \mathrel{\dot{\prec}} \beta.\mathsf{u}^*\,\delta\,x)) \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\gamma\,(\dot{\forall}\delta \mathrel{\dot{\prec}} \beta.\dot{\neg}\,(\mathsf{u}^*\,\delta\,x))) \\ \to & (\exists\delta \prec \beta.\mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\gamma\,(\mathsf{u}^*\,\delta\,x))) \vee (\forall\delta \prec \beta.\mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\gamma\,(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}^*\,\delta\,x)))) \end{array}$$

Wenn wir im zweiten Disjunktionsglied γ für δ einsetzen, erhalten wir

$$\mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\gamma\,(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}^*\,\gamma\,x)))$$

im Widerspruch zu Axiom V.(16). Also müßte für alle x

$$\exists\delta \prec \beta.\mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\gamma\,(\mathsf{u}^*\,\delta\,x))$$

und weiter

$$\exists\delta \prec \beta.\mathsf{T}(\mathsf{u}^*\,\delta\,x)$$

gelten, was z.B. für x gleich $\mathsf{u}^*\,\delta\,(\dot{\mathsf{N}}\,0)$ ebenso im Widerspruch zu V.(16) steht. $\square$

Definiert man $\cdot^*$ als Interpretation von $\mathcal{L}_{U'}$ in $\mathcal{L}_U$, bei der u durch u^* ersetzt wird, folgt aus diesem Lemma:

Korollar 88 Es sei α eine Limeszahl. Dann gilt:

$$\mathsf{FSU}_{<\alpha} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU} + \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{TI}(\overline{\beta}, \mathsf{T}(f\,\cdot)) + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^*.$$

Mit Satz 83 und der Tatsache, daß sich $\mathrm{TI}(\overline{k}, \mathsf{T}(f\,\cdot))$ in $\mathsf{FON} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ für $k < \omega$ trivial beweisen läßt, erhalten wir aus diesem Korollar:

Satz 89

1. $\mathsf{FSU}_{<\omega} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^*$,
2. $\mathsf{FSU}_{<\omega^\omega} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU} + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^*$,

3. $\mathsf{FSU}_{<\varepsilon_0} + (\text{C-I}_\mathsf{N}) \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU} + (\text{F-I}_\mathsf{N}) \vdash \varphi^*$.

Mit Korollar 86 folgt weiter das Theorem für die unteren Schranken:

Theorem 90

1. $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\omega} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU} + (\text{C-I}_\mathsf{N}) \vdash (\varphi^N)^*$,
2. $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\omega^\omega} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU} + (\text{T-I}_\mathsf{N}) \vdash (\varphi^N)^*$,
3. $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\varepsilon_0} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU} + (\text{F-I}_\mathsf{N}) \vdash (\varphi^N)^*$.

2.3.3 Obere Schranken

Bei der Bestimmung der oberen Schranken folgen wir im wesentlichen den Schritten von Jäger bei der Behandlung der Kripke-Platek-Mengenlehre KPi^0 in [Jäg84] bzw. Marzetta bei der Analyse von UTN in [Mar94]. In der konkreten Durchführung beschränken wir uns hier auf FSU mit Klassen- und Wahrheitsinduktion und diskutieren den Fall der Formelinduktion kurz in Abschnitt 2.3.4. Für die beiden schwachen Induktionsformen definieren wir zuerst einen Tait-Kalkül, in dem sich in üblicher Weise partielle Schnittelimination bis auf $\mathsf{T}^+/\mathsf{T}^-$-Formeln (s. Def. 91) beweisen läßt. Anschließend lassen sich beide Kalküle asymmetrisch in den für das Limesaxiom leicht verstärkten Theorien $\mathsf{FSU}^\star_\alpha$ interpretieren. Im Fall der Klasseninduktion benötigen wir dabei $<\omega$-viele Universen, für die Wahrheitsinduktion $<\omega^\omega$-viele. Im letzten Schritt betten wir die Zwischentheorien $\mathsf{FSU}^\star_\alpha + (\text{F-I}_\mathsf{N})$ in $\widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1}$ ein und erhalten, daß die unteren Schranken von $\mathsf{FSU} + (\text{C-I}_\mathsf{N})$ und $\mathsf{FSU} + (\text{T-I}_\mathsf{N})$ scharf sind.

Ein Tait-Kalkül für FSU

Für eine beweistheoretische Behandlung der FSU-Theorien definieren wir einen Tait-Kalkül (vgl. [Tai68]) anstelle des bisherigen Hilbert-Kalküls. Dabei verzichten wir bei der zugrundeliegenden Logik auf die Negation $\neg$ und starten mit $\wedge, \vee$ und beiden Quantoren $\forall$ und $\exists$. Dann erweitern wir die Sprache $\mathcal{L}_U$ zur Sprache $\mathcal{L}_U^T$ durch die Hinzunahme der neuen Relationssymbole

- $\overline{\mathsf{N}}, \overline{=}, \overline{\mathsf{T}}$ und $\overline{\mathsf{U}}$,

die für die Negation der entsprechenden Relationssymbole von $\mathcal{L}_U$ stehen. Damit läßt sich dann die Negation in der üblichen Weise für beliebige Formeln definieren.

Definition 91 Eine $\mathcal{L}_U^T$-Formel φ heißt T^+-Formel, falls sie keine Teilformeln $\overline{\mathsf{T}}(t)$ und $\overline{\mathsf{U}}(s)$ enthält; sie heißt T^--Formel, falls sie keine der Form $\mathsf{T}(t)$ und $\mathsf{U}(s)$ enthält.

In FSU^T werden endliche Mengen $(\Gamma, \Delta, \ldots)$ von $\mathcal{L}_U^T$-Formeln hergeleitet, die disjunktiv zu interpretieren sind. Wir verwenden die üblichen abkürzenden Schreibweisen, d.h. φ steht für die Einermenge $\{\varphi\}$ und die Vereinigung von Mengen kürzen wir durch Kommaschreibweise ab.

In der Logik von FSU^T haben wir nun die üblichen Axiome und Regeln für $\wedge$, $\vee$, $\forall$ und $\exists$, Identitäts- und Gleichheitsaxiome sowie die Schnittregel:

(Cut) $\dfrac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma, \neg\varphi}{\Gamma}$

φ nennen wir dabei die Schnittformel dieses Schlusses.

Im folgenden wollen wir nur die Hauptformeln der Axiome unter Verwendung von Variablen angeben. Dementsprechend meinen wir mit einer Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ alle endlichen Mengen

$$\Gamma, \varphi(t_1, \dots, t_n)$$

von FSU^T-Formeln, wobei $t_1, \dots, t_n$ beliebige Terme von FSU^T sind.

Bei den nichtlogischen Axiomen übernehmen wir die von TON unverändert.

Bei den Axiomen von FSU (s. S. 52) müssen wir etwas vorsichtiger sein, um zu garantieren, daß die für FSU^T gewählte Formulierung nur Hauptformeln enthält, die T^+- oder T^--Formeln sind. Dafür überlegen wir uns zuerst, daß sich die Abkürzungen aus Definition 80 im hier benötigten Kontext als T^+-Formeln schreiben lassen. Mit Hilfe der Abschlußregeln für $\vee$ und $\forall$ (die uns auch in FSU^T zur Verfügung stehen werden), läßt sich $\mathsf{Tf}(f)$ als

$$\mathsf{T}(\dot\forall x. f\, x \mathbin{\dot\vee} \dot\neg\, (f\, x))$$

schreiben. Für Universen u und v können wir auch $v \sqsubset u$ in der Form

$$\mathsf{T}(\dot\forall x. (u\, x \mathbin{\dot\to} v\, (u\, x)) \mathbin{\dot\wedge} (\dot\neg\, (u\, x) \mathbin{\dot\to} v\, (\dot\neg\, (u\, x))))$$

formulieren, da wir für Universen $\neg\mathsf{T}(u\, x)$ als $\mathsf{T}(\dot\neg\, (u\, x))$ und $\neg\mathsf{T}(\dot\neg\, (u\, x))$ als $\mathsf{T}(u\, x)$ schreiben dürfen. Analog läßt sich $u \equiv v$ für Universen u und v als T^+-Formel schreiben. Damit lassen sich alle Axiome von FSU in passende Form bringen, wobei man leicht nachrechnen kann, daß die in FSU^T gewählte Formulierung zu FSU äquivalent ist.

Für die Grundaxiome spalten wir I.(1) in zwei Axiome (Totalität und Konsistenz) auf, und erhalten:

(1a) $\overline{\mathsf{U}}(u), \mathsf{T}(u\, x), \mathsf{T}(\dot\neg\, (u\, x))$,

(1b) $\overline{\mathsf{U}}(u), \overline{\mathsf{T}}(u\, x), \overline{\mathsf{T}}(\dot\neg\, (u\, x))$,

(2) $\overline{\mathsf{U}}(u), \overline{\mathsf{T}}(u\, x), \mathsf{T}(x)$.

Bei den Abschlußeigenschaften spalten wir die Äquivalenzen in zwei Implikationen auf, d.h. wir nehmen beispielsweise für das FSU-Axiom II.(3)

$$\mathsf{U}(u) \to \forall x, y. x = y \leftrightarrow \mathsf{T}(u\, (x \mathbin{\dot=} y))$$

in FSU^T die beiden Axiome

(3a) $\overline{\mathsf{U}}(u), x{\equiv}y, \mathsf{T}(u\,(\dot{=}\,x\,y))$,

(3b) $\overline{\mathsf{U}}(u), \overline{\mathsf{T}}(u\,(\dot{=}\,x\,y)), x = y$

hinzu. Die Axiome II.(4) bis IV.(13) lassen sich analog schreiben. Bei den Axiomen für die Ordnungsrelationen erhalten wir:

(14) $\overline{\mathsf{U}}(u), \overline{\mathsf{U}}(v), \neg u \sqsubset v, \overline{\mathsf{T}}(u\,x), \mathsf{T}(v\,x)$,

(15) $\overline{\mathsf{U}}(u), \overline{\mathsf{U}}(v), u \sqsubset v, v \equiv u, v \sqsubset u$,

(16a) $\overline{\mathsf{U}}(u), \overline{\mathsf{U}}(v), \neg u \equiv v, \overline{\mathsf{T}}(v\,(u\,x)) \wedge \overline{\mathsf{T}}(v\,(\dot{\neg}\,(u\,x)))$,

(16b) $\overline{\mathsf{U}}(u), \overline{\mathsf{U}}(v), \neg v \sqsubset u, \overline{\mathsf{T}}(v\,(u\,x)) \wedge \overline{\mathsf{T}}(v\,(\dot{\neg}\,(u\,x)))$.

Das Limesaxiom spalten wir in die drei folgenden Axiome auf:

(17a) $\neg \mathsf{Tf}(f), \mathsf{U}(\mathsf{lim}\, f)$,

(17b) $\neg \mathsf{Tf}(f), \overline{\mathsf{T}}(f\,x), \mathsf{T}(\mathsf{lim}\, f\,(f\,x))$,

(17c) $\neg \mathsf{Tf}(f), \overline{\mathsf{T}}(\dot{\neg}\,(f\,x)), \mathsf{T}(\mathsf{lim}\, f\,(\dot{\neg}\,(f\,x)))$.

Für die Klassen- und Wahrheitsinduktion nehmen wir in FSU^T Regeln hinzu:

$$(\mathsf{C}\text{-}\mathsf{I}_\mathsf{N})^T \qquad \frac{\Gamma, \mathsf{C}(f)}{\Gamma, \overline{\mathsf{T}}(f\,0), (\exists x : \mathsf{N}.\overline{\mathsf{T}}(\dot{\neg}\,(f\,x)) \wedge \overline{\mathsf{T}}(f\,x')), \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(f\,x)}$$

Die Hauptformeln dieser Regel sind die Formeln $\overline{\mathsf{T}}(f\,0)$, $\exists x : \mathsf{N}.\overline{\mathsf{T}}(\dot{\neg}\,(f\,x)) \wedge \overline{\mathsf{T}}(f\,x')$ und $\forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(f\,x)$. Man beachte, daß wir mit der Voraussetzung $\mathsf{C}(f)$ im Induktionsschritt $\mathsf{T}(f\,x)$ als $\overline{\mathsf{T}}(\dot{\neg}\,(f\,x))$ schreiben können, was im Fall der Wahrheitsinduktion nicht möglich ist:

$$(\mathsf{T}\text{-}\mathsf{I}_\mathsf{N})^T \qquad \frac{\Gamma, \mathsf{T}(f\,0) \quad \Gamma, \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(f\,x) \rightarrow \mathsf{T}(f\,x')}{\Gamma, \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(f\,x)}$$

Die Hauptformel dieser Regel ist $\forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(f\,x)$.

Ist φ^T die kanonische Übersetzung einer $\mathcal{L}_U$-Formel φ, so erhalten wir damit:

Satz 92

1. $\mathsf{FSU} + (\mathsf{C}\text{-}\mathsf{I}_\mathsf{N}) \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU}^T + (\mathsf{C}\text{-}\mathsf{I}_\mathsf{N})^T \vdash \varphi^T$,
2. $\mathsf{FSU} + (\mathsf{T}\text{-}\mathsf{I}_\mathsf{N}) \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU}^T + (\mathsf{T}\text{-}\mathsf{I}_\mathsf{N})^T \vdash \varphi^T$.

Partielle Schnittelimination

Wir schreiben nun $\vdash_{\star} \Gamma$, wenn $\vdash \Gamma$ gilt und jede Schnittformel in der Herleitung von Γ eine T^{+}- oder T^{-}-Formel ist. Später verwenden wir noch die Notation $\vdash^{l}_{\star} \Gamma$ mit $l \in \mathbb{N}$, falls $\vdash_{\star} \Gamma$ für eine Herleitung der Tiefe l gilt.

Da alle Hauptformeln der nichtlogischen Axiome und Regeln von FSU^{T} T^{+}- oder T^{-}-Formeln sind, können wir mit den üblichen Methoden der Beweistheorie partielle Schnittelimination beweisen (s. z.B. [Sch77] oder [Mar94]):

Satz 93 Für jede endliche Menge Γ von $\mathcal{L}^{T}_{U}$-Formeln gilt:

1. $\mathsf{FSU}^{T} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^{T} \vdash \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU}^{T} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^{T} \vdash_{\star} \Gamma$,
2. $\mathsf{FSU}^{T} + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^{T} \vdash \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU}^{T} + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^{T} \vdash_{\star} \Gamma$.

Iterierte Frege-Strukturen mit Limes

Wir verstärken nun für Ordinalzahlen $\alpha < \varepsilon_0$ unsere Theorien FSU_{α} (s. S. 56) zu Theorien $\mathsf{FSU}^{\star}_{\alpha}$, bei denen die uniforme Limesbildung hinzukommt. Wir erweitern dazu die Sprache von FSU_{α} um die Konstante lim und nehmen für die Universen zusätzlich zum Axiom

(Univ_{α}) $\forall \beta \prec \overline{\alpha}.\mathsf{U}(\mathsf{u}\,\beta) \wedge \forall \gamma \prec \beta.\mathsf{u}\,\gamma \sqsubset \mathsf{u}\,\beta$

noch das folgende Axiom hinzu:

$$(\mathsf{Lim}_{\alpha}) \quad \forall \gamma \prec \overline{\alpha}.\forall \beta \prec \gamma.(\forall x.\mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(f\,x)) \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\neg}\,(f\,x)))) \\ \rightarrow \mathsf{U}(\mathsf{lim}\,f) \wedge f \sqsubset \mathsf{lim}\,f \wedge \mathsf{lim}\,f \sqsubset \mathsf{u}\,(\beta+1).$$

In diesem Axiom fordern wir, daß es zu einer Funktion f, die eine Wahrheitsfunktion *im Universum* $\mathsf{u}\,\beta$ ist, d.h. deren Werte bereits in $\mathsf{u}\,\beta$ wahr bzw. falsch sind, ein (uniform gebildetes) Universum $\mathsf{lim}\,f$ über f gibt. Zudem wird verlangt, daß $\mathsf{lim}\,f$ unterhalb von $\mathsf{u}\,(\beta+1)$ liegt. Das γ zwischen β und $\overline{\alpha}$ stellt sicher, daß es das Universum $\mathsf{u}\,(\beta+1)$ in $\mathsf{FSU}^{\star}_{<\alpha}$ gibt. In unserer späteren Modellkonsturktion werden wir $\mathsf{lim}\,f$ so wählen, daß es mit $\mathsf{u}\,\beta$ identisch ist, falls $\mathsf{u}\,\beta$ das kleinste Universum ist, für das sich die Prämisse von (Lim_{α}) beweisen läßt.

Für $\alpha \leq \varepsilon_0$ sei $\mathsf{FSU}^{\star}_{<\alpha}$ wieder als die Vereinigung der Theorien $\mathsf{FSU}^{\star}_{\beta}$ mit $\beta < \alpha$ definiert.

Definition 94 Für Terme r und s und Formeln φ der Sprache von $\mathsf{FSU}^{\star}_{\alpha}$ definieren wir induktiv über den Aufbau von φ:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}(t)^{(r,s)} &:\Leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,s\,t), \\ \neg\mathsf{T}(t)^{(r,s)} &:\Leftrightarrow \neg\mathsf{T}(\mathsf{u}\,r\,t), \\ \mathsf{U}(u)^{(r,s)} &:\Leftrightarrow \mathsf{U}(u) \wedge u \sqsubset \mathsf{u}\,s, \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcll}
\neg\mathsf{U}(u)^{(r,s)} & :\Leftrightarrow & \neg(\mathsf{U}(u) \wedge u \sqsubset \mathsf{u}\, r), & \\
\varphi^{(r,s)} & :\Leftrightarrow & \varphi & \text{für alle anderen Primformeln } \varphi, \\
(\neg\varphi)^{(r,s)} & :\Leftrightarrow & \neg\varphi & \text{für alle anderen Primformeln } \varphi, \\
(\psi \wedge \chi)^{(r,s)} & :\Leftrightarrow & \psi^{(r,s)} \wedge \chi^{(r,s)}, & \\
(\psi \vee \chi)^{(r,s)} & :\Leftrightarrow & \psi^{(r,s)} \vee \chi^{(r,s)}, & \\
(\forall x.\psi)^{(r,s)} & :\Leftrightarrow & \forall x.\psi^{(r,s)}, & \\
(\exists x.\psi)^{(r,s)} & :\Leftrightarrow & \exists x.\psi^{(r,s)}. &
\end{array}
$$

Wir werden später für r und s jeweils Ordinalzahlen einsetzen, so daß man davon sprechen kann, daß in einer Formel $\varphi^{(\beta,\gamma)}$ wahre Terme im Universum $\mathsf{u}\,\gamma$ wahr sind. Terme, die nicht wahr sind, sind entsprechend nicht im Universum $\mathsf{u}\,\beta$ wahr. Im Fall der Wahrheitsinduktion werden wir über diese Beschränkungen auch quantifizieren, so daß wir alle Aussagen darüber „innerhalb" von FSU_α beweisen. Ganz wesentlich benutzen wir die *Persistenz*, die sich wie folgt formulieren läßt:

Lemma 95

$$\mathsf{FSU}^\star_\alpha \vdash \forall\beta_0, \gamma_0, \beta_1, \gamma_1.\beta_0 \prec \overline{\alpha} \wedge \gamma_1 \prec \overline{\alpha} \wedge \beta_1 \preceq \beta_0 \wedge \gamma_0 \preceq \gamma_1 \wedge \varphi^{(\beta_0,\gamma_0)} \to \varphi^{(\beta_1,\gamma_1)}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt mit Induktion über Formelaufbau aus (Univ_α) und der Definition von $\sqsubset$. $\square$

Neben der Persistenz verwenden wir auch noch folgende Eigenschaften, die sich sofort durch Induktion über Formelaufbau bzw. aus der T-Positivität von $v \sqsubset u$ und $u \equiv v$ ergeben.

Lemma 96

1. Sei φ eine T^+-Formel. Dann gilt: $\mathsf{FSU}^\star_\alpha \vdash \forall\beta, \gamma, \delta.(\neg\varphi)^{(\beta,\gamma)} \leftrightarrow \neg(\varphi^{(\delta,\beta)})$,
2. Sei φ eine T^--Formel. Dann gilt: $\mathsf{FSU}^\star_\alpha \vdash \forall\beta, \gamma, \delta.(\neg\varphi)^{(\beta,\gamma)} \leftrightarrow \neg(\varphi^{(\gamma,\delta)})$,
3. $\mathsf{FSU}^\star_\alpha \vdash \forall\beta, \gamma.\mathsf{U}(u) \wedge \mathsf{U}(v) \wedge u \sqsubset \mathsf{u}\,\gamma \wedge v \sqsubset \mathsf{u}\,\gamma \to$
$$((u \sqsubset v)^{(\beta,\gamma)} \leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\gamma\,(\overset{\cdot}{\overbrace{u \sqsubset v}}))) \wedge ((u \equiv v)^{(\beta,\gamma)} \leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\gamma\,(\overset{\cdot}{\overbrace{u \equiv u}}))).$$

Die dritte Aussage, die wir bei der Verifikation der Ordnungsaxiome benötigen, erlaubt es, die Aussagen $v \sqsubset u$ und $u \equiv v$ bei der asymmetrischen Interpretation als Aussagen relativ zu einem Universum zu schreiben, daß über u und v liegt.

Bei der Interpretation der Theorien FSU^T mit Klasseninduktion in den Theorien $\mathsf{FSU}^\star_\alpha$ wechseln wir wieder von einem Tait-Kalkül zurück in einen Hilbert-Kalkül. Um die Darstellung übersichtlich zu halten, soll dabei Γ in $\mathsf{FSU}^\star_\alpha$ für die Disjunktion der Übersetzungen der Elemente aus Γ stehen, ohne daß wir das näher bezeichnen.

Asymmetrische Interpretation von $\mathsf{FSU}^T + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^T$

Satz 97 Für alle natürlichen Zahlen l und k gilt:

$$\mathsf{FSU}^T + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^T \,\overset{l}{\underset{\star}{\vdash}}\, \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU}_k^\star + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \forall m : \mathsf{N}.m + 2^{\overline{l}} < \overline{k} \to \Gamma^{(m, m+2^{\overline{l}})}.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion über l.
Induktionsanfang: Im Fall $l = 0$ muß Γ ein Axiom von $\mathsf{FSU}^T + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^T$ sein. Nun setzen wir $n := m + 2^{\overline{l}}$ mit $n < \overline{k}$. Bei den Axiomen für die Universen ergibt sich aus der asymmetrischen Interpretation von $\overline{\mathsf{U}}(u)$, daß wir $\mathsf{U}(u) \wedge u \sqsubset \mathsf{u}\, m$ und mit der Transitivität von Universen auch $u \sqsubset \mathsf{u}\, n$ annehmen dürfen.

1. Die logischen Axiome folgen mit Persistenz.

2. TON-Axiome.

   Da U und T in den Axiomen von TON nicht vorkommen, ergibt sich die Behauptung mit den entsprechenden Axiomen in $\mathsf{FSU}_k^\star$.

3. Grundaxiome.

   (1a) Mit $\mathsf{U}(u)$ folgt $\mathsf{C}(u)$ und daraus $\mathsf{T}(u\, x) \vee \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(u\, x))$. Wenn wir nun $\neg\mathsf{T}(\mathsf{u}\, n\, (u\, x))$ annehmen, folgt mit $u \sqsubset \mathsf{u}\, n$, daß $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, n\, (\dot{\neg}\,(u\, x)))$ gilt.

   (1b) Aus $\mathsf{C}(u)$ folgt auch $\neg(\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(u\, x)) \wedge \mathsf{T}(u\, x))$. Würde nun $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, m\, (u\, x))$ und $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, m\, (\dot{\neg}\,(u\, x)))$ gelten, bekämen wir einen Widerspruch.

   (2) Aus $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, m\, (u\, x))$ folgt $\mathsf{T}(u\, x)$ und mit $u \sqsubset \mathsf{u}\, n$ auch $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, n\, x)$, was zu zeigen war.

4. Abschlußaxiome.

   (3a) Aus $x = y$ folgt $\mathsf{T}(u\, (x \doteq y))$ und mit $u \sqsubset \mathsf{u}\, n$ auch $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, n\, (u\, (x \doteq y)))$.

   (3b) Mit $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, m\, (u\, (x \doteq y)))$ haben wir $\mathsf{T}(u\, (x \doteq y))$ und weiter $x = y$.

   Die Axiome (4a) bis (13b) folgen ganz analog, wobei wir hier noch den ersten Fall für den Allquantor angeben:

   (10a) Aus $\forall x.\mathsf{T}(\mathsf{u}\, m\, (u\, (f\, x)))$ folgt $\forall x.\mathsf{T}(u\, (f\, x))$ und weiter $\mathsf{T}(u\, (\dot{\forall}\, f))$. Mit $u \sqsubset \mathsf{u}\, m$ erhalten wir dann $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, m\, (u\, (\dot{\forall}\, f)))$.

5. Ordnungsaxiome.

   (14) Für das erste Ordnungsaxiom können wir $u \sqsubset \mathsf{u}\, m$ und $v \sqsubset \mathsf{u}\, m$ voraussetzen. Aus $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, m\, (\overset{\cdot}{\overbrace{u \sqsubset v}}))$ folgt $u \sqsubset v$, und mit $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, m\, (u\, x))$ folgt $\mathsf{T}(u\, x)$, so daß wir auf $\mathsf{T}(v\, x)$ schließen können. Mit $v \sqsubset \mathsf{u}\, n$ erhalten wir schließlich $\mathsf{T}(\mathsf{u}\, n\, (v\, x))$.

(15) Mit $u \sqsubset \mathsf{u}\,n$ und $v \sqsubset \mathsf{u}\,n$ erhalten wir aus $u \sqsubset v \vee v \equiv u \vee v \sqsubset u$ sofort $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,n\,(\overbrace{u \sqsubset v}^{\cdot})) \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,n\,(\overbrace{u \equiv v}^{\cdot})) \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,n\,(\overbrace{u \sqsubset v}^{\cdot}))$.

(16a) Wir setzen $u \sqsubset \mathsf{u}\,m$, $v \sqsubset \mathsf{u}\,m$ und $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m(\overbrace{u \equiv v}^{\cdot}))$ voraus. Dann folgt $u \equiv v$ und weiter $\neg\mathsf{T}(v\,(u\,x)) \wedge \neg\mathsf{T}(v\,(\dot{\neg}\,(u\,x)))$. Also gilt auch

$$\neg\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(v\,(u\,x))) \wedge \neg\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(v\,(\dot{\neg}\,(u\,x)))).$$

(16b) Die Aussage folgt analog zu (16a).

6. Limes.

(17a) Wir können $\forall x.\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(f\,x)) \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(\dot{\neg}\,(f\,x)))$ annehmen. Mit (Lim_α) erhalten wir daraus $\mathsf{U}(\mathsf{lim}\,f) \wedge \mathsf{lim}\,f \sqsubset \mathsf{u}\,(m{+}1)$ und weiter $\mathsf{U}(\mathsf{lim}\,f)^{(m,n)}$.

(17b) Aus (Lim_α) folgt $f \sqsubset \mathsf{lim}\,f \wedge \mathsf{lim}\,f \sqsubset \mathsf{u}\,(m+1)$. Nehmen wir zusätzlich $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(f\,x))$ an, folgt $\mathsf{T}(f\,x)$ und weiter $\mathsf{T}(\mathsf{lim}\,f\,(f\,x))$. Mit $\mathsf{lim}\,f \sqsubset \mathsf{u}\,n$ gilt dann $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,n\,(\mathsf{lim}\,f\,(f\,x)))$.

(17c) Wir erhalten wieder $f \sqsubset \mathsf{lim}\,f \wedge \mathsf{lim}\,f \sqsubset \mathsf{u}\,(m+1)$. Analog zum vorhergehenden Fall ergibt sich $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,n\,(\mathsf{lim}\,f\,(\dot{\neg}\,(f\,x))))$ aus $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(\dot{\neg}\,(f\,x)))$.

Induktionsschritt:
In $\mathsf{FSU}^\star_\alpha + (\text{F-I}_\mathsf{N})$ lassen sich die logischen Regeln mit Persistenz bis auf die Schnittregel leicht verifizieren.

1. Schnittregel.

Bei den Schnitten haben wir als Prämissen für ein $l_0 < l$:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{FSU}^T + (\text{C-I}_\mathsf{N})^T & \overset{l_0}{\underset{\star}{\vdash}} & \Gamma, \varphi, \\ \mathsf{FSU}^T + (\text{C-I}_\mathsf{N})^T & \overset{l_0}{\underset{\star}{\vdash}} & \Gamma, \neg\varphi, \end{array}$$

wobei φ eine T^+- oder T^--Formel ist. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt in $\mathsf{FSU}^\star_\alpha + (\text{F-I}_\mathsf{N})$, wenn wir im zweiten Fall $m + 2^{\overline{l_0}}$ für m einsetzen:

$$\forall m : \mathsf{N}.m + 2^{\overline{l_0}} < k \rightarrow (\Gamma \vee \varphi)^{(m,m+2^{\overline{l_0}})},$$
$$\forall m : \mathsf{N}.m + 2^{\overline{l_0}} + 2^{\overline{l_0}} < k \rightarrow (\Gamma \vee \neg\varphi)^{(m+2^{\overline{l_0}},m+2^{\overline{l_0}}+2^{\overline{l_0}})}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß φ eine T^+-Formel ist. Zudem gilt mit $l_0 < l$ auch $m + 2^{\overline{l_0}} + 2^{\overline{l_0}} \leq m + 2^{\overline{l}}$ und wir erhalten mit Persistenz und Lemma 96:

$$\forall m : \mathsf{N}.m + 2^{\overline{l}} < k \rightarrow \Gamma^{(m,m+2^{\overline{l}})} \vee \varphi^{(m,m+2^{\overline{l_0}})},$$
$$\forall m : \mathsf{N}.m + 2^{\overline{l}} < k \rightarrow \Gamma^{(m,m+2^{\overline{l}})} \vee \neg(\varphi^{(m,m+2^{\overline{l_0}})}).$$

Daraus folgt für die Konklusion Γ der Schnittregel:

$$\forall m : \mathsf{N}.m + 2^{\overline{l}} < k \rightarrow \Gamma^{(m,m+2^{\overline{l}})}.$$

2. Klasseninduktion

   Als Prämisse der Klasseninduktion haben wir für ein $l_0 < l$

$$\mathsf{FSU}^T + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})^T \mathrel{\vphantom{\vdash}\smash{\mathop{\vdash}\limits^{l_0}_{\star}}} \Gamma, \mathsf{C}(f).$$

   Dann gilt mit der Induktionsvoraussetzung in $\mathsf{FSU}^\star_k + (\text{F-I}_\mathsf{N})$

$$\forall m : \mathsf{N}.m + 2^{\overline{l_0}} < \overline{k} \to (\Gamma \vee \mathsf{C}(f))^{(m, m+2^{\overline{l_0}})},$$

   woraus wir mit Persistenz für alle m mit $m + 2^{\overline{l}} < \overline{k}$ erhalten, daß $\Gamma^{(m,m+2^{\overline{l}})}$ oder

$$\begin{aligned} \forall x.(&\mathsf{T}(\mathsf{u}\,(m+2^{\overline{l_0}})\,(f\,x)) \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,(m+2^{\overline{l_0}})\,(\dot{\neg}\,(f\,x)))) \wedge \\ &(\neg\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(f\,x)) \vee \neg\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(\dot{\neg}\,f\,x))) \end{aligned} \qquad (1)$$

   gilt. Nehmen wir nun $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(f\,0))$ und $\forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(\dot{\neg}\,(f\,x))) \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(f\,x'))$ an, können wir aufgrund von (1) bei $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(\dot{\neg}\,(f\,x)))$ die Negation ganz nach außen ziehen und erhalten: $\forall x : \mathsf{N}.\neg\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(f\,x)) \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(f\,x'))$. Somit folgt aus (F-I_N)

$$\forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(\mathsf{u}\,m\,(f\,x)),$$

   und mit Persistenz $\forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(\mathsf{u}\,(m+2^{\overline{l}})\,(f\,x))$, was zu zeigen war. □

Mit Satz 92 erhalten wir als Korollar:

Korollar 98 $\mathsf{FSU} + (\mathsf{C}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N}) \trianglelefteq \mathsf{FSU}^\star_{<\omega} + (\text{F-I}_\mathsf{N})$.

Asymmetrische Interpretation von $\mathsf{FSU}^T + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})^T$

Satz 99 Für alle Ordinalzahlen $\alpha < \omega^\omega$ und natürlichen Zahlen l gilt

$$\mathsf{FSU}^T + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})^T \mathrel{\mathop{\vdash}\limits^{l}_{\star}} \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FSU}^\star_\alpha + (\text{F-I}_\mathsf{N}) \vdash \forall\beta.\beta + \overline{\omega}^{\overline{l}} \prec \overline{\alpha} \to \Gamma^{(\beta,\beta+\overline{\omega}^{\overline{l}})}.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion über l.
Induktionsanfang: Im Fall $l = 0$ muß Γ ein Axiom von $\mathsf{FSU}^T + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_\mathsf{N})^T$ sein, und die Aussage folgt analog zur Klasseninduktion.
Induktionsschritt:

1. Schnittregel.

   Der Beweis der Schnittregel erfolgt wie im Beweis von Satz 97, wobei man m durch β und $m + 2^{\overline{l_0}}$ durch $\beta + \omega^{\overline{l_0}}$ ersetzt.

2. Wahrheitsinduktion.

   Die Voraussetzung von $(\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^T$ besagt für ein $l_0 < l$:

$$\begin{array}{lll} \mathsf{FSU}^T + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^T & \vdash^{l_0}_{\star} & \Gamma, \mathsf{T}(f\,0), \\ \mathsf{FSU}^T + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^T & \vdash^{l_0}_{\star} & \Gamma, \forall x.\mathsf{T}(f\,x) \to \mathsf{T}(f\,x'). \end{array}$$

   Daraus folgt in $\mathsf{FSU}^\star_\alpha + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^T$ mit der Induktionsvoraussetzung

$$\forall \beta.\beta + \overline{\omega}^{\overline{l_0}} \prec \overline{\alpha} \to (\Gamma \vee \mathsf{T}(f\,0))^{(\beta,\beta+\overline{\omega}^{\overline{l_0}})}, \tag{1}$$

$$\forall \beta.\beta + \overline{\omega}^{\overline{l_0}} \prec \overline{\alpha} \to (\Gamma \vee \forall x.\mathsf{T}(f\,x) \to \mathsf{T}(f\,x'))^{(\beta,\beta+\overline{\omega}^{\overline{l_0}})}. \tag{2}$$

   Nun definieren wir in $\mathsf{FSU}^\star_\alpha$ eine Funktion g mit

$$g\,\beta\,x = \beta + \overline{\omega}^{\overline{l_0}} \cdot (x+1).$$

   Mit Hilfe von $(\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})$ beweisen wir:

$$\forall x : \mathsf{N}.\forall \beta.g\,\beta\,x \prec \overline{\alpha} \to (\Gamma \vee \mathsf{T}(f\,x))^{(\beta,g\,\beta\,x)}. \tag{3}$$

   Für $x = 0$ ist die Aussage identisch mit (1) und wir brauchen nur den Induktionsschritt zu zeigen. Gelte also $\mathsf{N}(x)$. Dann setzen wir zuerst für β in (2) $g\,\beta\,x$ ein und erhalten:

$$\forall \beta.g\,\beta\,x + \overline{\omega}^{\overline{l_0}} \prec \overline{\alpha} \to (\Gamma \vee \forall y.\mathsf{T}(f\,y) \to \mathsf{T}(f\,y'))^{(g\,\beta\,x,g\,\beta\,x+\overline{\omega}^{\overline{l_0}})},$$

   bzw.

$$\forall \beta.g\,\beta\,x' \prec \overline{\alpha} \to \Gamma^{(g\,\beta\,x,g\,\beta\,x')} \vee (\mathsf{T}(\mathsf{u}\,(g\,\beta\,x)\,f\,x) \to \mathsf{T}(\mathsf{u}\,(g\,\beta\,x')\,(f\,x'))).$$

   Mit Persistenz erhalten wir daraus:

$$\forall \beta.g\,\beta\,x' \prec \overline{\alpha} \to \Gamma^{(\beta,g\,\beta\,x')} \vee (\mathsf{T}(\mathsf{u}\,(g\,\beta\,x)\,f\,x) \to \mathsf{T}(\mathsf{u}\,(g\,\beta\,x')\,(f\,x'))). \tag{4}$$

   Nun nehmen wir zusätzlich die Induktionsvoraussetzung zu (3) an:

$$\forall \beta.g\,\beta\,x \prec \overline{\alpha} \to (\Gamma \vee \mathsf{T}(f\,x))^{(\beta,g\,\beta\,x)}$$

   und erhalten mit Persistenz

$$\forall \beta.g\,\beta\,x' \prec \overline{\alpha} \to \Gamma^{(\beta,g\,\beta\,x')} \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,(g\,\beta\,x)\,(f\,x))).$$

   Zusammen mit (4) folgt dann:

$$\forall \beta.g\,\beta\,x' \prec \overline{\alpha} \to \Gamma^{(\beta,g\,\beta\,x')} \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,(g\,\beta\,x')\,(f\,x')).$$

   Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und wir erhalten mit

$$g\,\beta\,x' = \beta + \overline{\omega}^{\overline{l_0}} \cdot x' \prec \beta + \overline{\omega}^{\overline{l_0}+1} \preceq \beta + \overline{\omega}^{\overline{l}}$$

   und mit Persistenz

$$\forall \beta.\beta + \overline{\omega}^{\overline{l}} \prec \overline{\alpha} \to \Gamma^{(\beta,\beta+\overline{\omega}^{\overline{l}})} \vee \forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(\mathsf{u}\,(\beta + \overline{\omega}^{\overline{l}})\,(f\,x)),$$

   woraus die asymmetrische Interpretation der Konklusion von $(\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}})^T$ folgt. □

Bei der Verifikation der Wahrheitsinduktion konnten wir dem Vorgehen von Cantini [Can89] folgen, der einen entsprechenden Beweis für eine Wahrheitstheorie über PA liefert. Man beachte, daß aufgrund der (Neben-)Induktion in $\mathsf{FSU}^\star_\alpha$ im Fall der Wahrheitsinduktion bei der asymmetrischen Interpretation l zur Basis ω potenziert werden muß, statt zur Basis 2 wie im Fall der Klasseninduktion (oder auch beim üblichen Vorgehen im Fall der Formelinduktion).

Nun erhalten wir wieder mit Satz 92:

Korollar 100 $\mathsf{FSU} + (\text{T-I}_\mathsf{N}) \trianglelefteq \mathsf{FSU}^\star_{<\omega^\omega} + (\text{F-I}_\mathsf{N})$.

Einbettung von $\mathsf{FSU}^\star_\alpha + (\text{F-I}_\mathsf{N})^T$ in $\widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1}$

Wir gehen bei der Einbettung von $\mathsf{FSU}^\star_\alpha + (\text{F-I}_\mathsf{N})^T$ in $\widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1}$ von der Formalisierung des totalen Termmodells $\mathcal{CTT}$ von TON in PA (s. S. 19) aus und passen diese an die erweiterte Theorie an. Dabei läßt sich $\mathcal{CTT}$ um die neuen Individuenkonstanten $\dot{=}, \dot{\mathsf{N}}, \dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\forall}, \dot{\mathsf{T}}$ sowie u und lim erweitern, für die wir keine neuen Reduktionsregeln zu ϱ hinzunehmen.

Nun müssen wir die Einbettung $\cdot^*$ von $\mathsf{TON} + (\text{F-I}_\mathsf{N})$ in PA, bei der wir

$$\begin{aligned} (t = s)^* \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists x.\mathrm{Red}_{\varrho^\star}(\ulcorner t \urcorner, x) \wedge \mathrm{Red}_{\varrho^\star}(\ulcorner s \urcorner, x), \\ \mathsf{N}(t)^* \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists x.\mathrm{Red}_{\varrho^\star}(\ulcorner t \urcorner, \mathrm{num}(x)) \end{aligned}$$

gesetzt hatten, um Interpretationen für $\mathsf{T}(t)$ und $\mathsf{U}(t)$ erweitern.

Man kann sich leicht überlegen, daß sich in $\widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1}$ eine induktive Operatorform φ mit Fixpunkt $\mathcal{T}^\varphi$ definieren läßt, so daß man für $\beta \prec \overline{\alpha} + 1$ erhält: $\mathcal{T}^\varphi_\beta(x)$ gilt genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\mathrm{CTer}(x) \wedge \mathcal{T}^\varphi_{\prec\beta}(x)$,
2. $\exists y, z.\mathrm{CTer}(y) \wedge \mathrm{CTer}(z) \wedge x = \ulcorner y \mathbin{\dot{=}} z \urcorner \wedge (y = z)^*$,
3. $\exists y, z.\mathrm{CTer}(y) \wedge \mathrm{CTer}(z) \wedge x = \ulcorner \dot{\neg}\, y \mathbin{\dot{=}} z \urcorner \wedge (\neg y = z)^*$,
4. $\exists y.\mathrm{CTer}(y) \wedge x = \ulcorner \dot{\mathsf{N}}\, y \urcorner \wedge \mathsf{N}(y)^*$,
5. $\exists y.\mathrm{CTer}(y) \wedge x = \ulcorner \dot{\neg}\, (\dot{\mathsf{N}}\, y) \urcorner \wedge \neg \mathsf{N}(y)^*$,
6. $\exists y.\mathrm{CTer}(y) \wedge x = \ulcorner \dot{\neg}\, (\dot{\neg}\, y) \urcorner \wedge \mathcal{T}^\varphi_\beta(y)$,
7. $\exists y, z.\mathrm{CTer}(y) \wedge \mathrm{CTer}(z) \wedge x = \ulcorner y \mathbin{\dot{\wedge}} z \urcorner \wedge \mathcal{T}^\varphi_\beta(y) \wedge \mathcal{T}^\varphi_\beta(z)$,
8. $\exists y, z.\mathrm{CTer}(y) \wedge \mathrm{CTer}(z) \wedge x = \ulcorner \dot{\neg}\, (y \mathbin{\dot{\wedge}} z) \urcorner \wedge (\mathcal{T}^\varphi_\beta(\ulcorner \dot{\neg}\, y \urcorner) \vee \mathcal{T}^\varphi_\beta(\ulcorner \dot{\neg}\, z \urcorner))$,
9. $\exists f.\mathrm{CTer}(f) \wedge x = \ulcorner \dot{\forall}\, f \urcorner \wedge (\forall y.\mathrm{CTer}(y) \rightarrow \mathcal{T}^\varphi_\beta(\ulcorner f\, y \urcorner))$,
10. $\exists f.\mathrm{CTer}(f) \wedge x = \ulcorner \dot{\neg}\, (\dot{\forall}\, f) \urcorner \wedge (\exists y.\mathrm{CTer}(y) \wedge \mathcal{T}^\varphi_\beta(\ulcorner \dot{\neg}\, (f\, y) \urcorner))$,

11. $\exists y.\mathrm{CTer}(y) \wedge x = \ulcorner \dot{\mathsf{T}}\, y \urcorner \wedge \mathcal{T}^{\varphi}_{\beta}(y)$,

12. $\exists y.\mathrm{CTer}(y) \wedge x = \ulcorner \dot{\neg}\, (\dot{\mathsf{T}}\, y) \urcorner \wedge \mathcal{T}^{\varphi}_{\beta}(\ulcorner \dot{\neg}\, y \urcorner)$,

13. $\exists y.\mathrm{CTer}(y) \wedge \exists \gamma.\gamma + 1 = \beta \wedge x = \ulcorner \mathsf{u}\, \gamma\, y \urcorner \wedge \mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\beta}(y)$,

14. $\exists y.\mathrm{CTer}(y) \wedge \exists \gamma.\gamma + 1 = \beta \wedge x = \ulcorner \dot{\neg}\mathsf{u}\, \gamma\, y \urcorner \wedge \neg\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\beta}(y)$,

15. $\exists f, y.\mathrm{CTer}(f) \wedge \mathrm{CTer}(y) \wedge x = \ulcorner \mathsf{lim}\, f\, y \urcorner \wedge$
$\exists \gamma.\gamma + 1 = \beta \wedge \mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\beta}(y) \wedge \mathcal{T}^{\varphi}_{\gamma}(\ulcorner \dot{\forall} z.f\, z \mathbin{\dot{\vee}} \dot{\neg}\, (f\, z) \urcorner) \wedge \neg\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\gamma}(\ulcorner \dot{\forall} z.f\, z \mathbin{\dot{\vee}} \dot{\neg}\, (f\, z) \urcorner)$,

16. $\exists f, y.\mathrm{CTer}(f) \wedge \mathrm{CTer}(y) \wedge x = \ulcorner \dot{\neg}\mathsf{lim}\, f\, y \urcorner \wedge$
$\exists \gamma.\gamma + 1 = \beta \wedge \neg\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\beta}(y) \wedge \mathcal{T}^{\varphi}_{\gamma}(\ulcorner \dot{\forall} z.f\, z \mathbin{\dot{\vee}} \dot{\neg}\, (f\, z) \urcorner) \wedge \neg\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\gamma}(\ulcorner \dot{\forall} z.f\, z \mathbin{\dot{\vee}} \dot{\neg}\, (f\, z) \urcorner)$.

Nun übersetzen wir:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}(t)^* \ &:\Leftrightarrow\ \mathcal{T}^{\varphi}_{\overline{\alpha}}(\ulcorner t \urcorner), \\ \mathsf{U}(t)^* \ &:\Leftrightarrow\ (\exists \gamma \prec \overline{\alpha}.\ulcorner t \urcorner = \ulcorner \mathsf{u}\, \gamma \urcorner) \vee \\ & (\exists f.\mathrm{CTer}(f) \wedge \ulcorner t \urcorner = \ulcorner \mathsf{lim}\, f \urcorner \wedge \mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\overline{\alpha}}(\ulcorner \dot{\forall} y.f\, y \mathbin{\dot{\vee}} \dot{\neg}\, (f\, y) \urcorner)). \end{aligned}$$

Die Fixpunkte $\mathcal{T}^{\varphi}_{\beta}$ sind so angelegt, daß sie entsprechende Abschlußeigenschaften wie die Universen haben. Die Klauseln 13. und 15. legen dabei fest, daß in einem Universum all die Terme aufgenommen werden, die in einer tieferen Schicht wahr sind. Für Terme, deren Wahrheit sich nicht in einer tieferen Schicht zeigen ließ, wird in den Klauseln 14. und 16. festgelegt, daß sie nicht im Universum liegen. Man kann sich überlegen, daß schon für den Abschluß von T unter dem Allquantor bei „Limesuniversen“ sichergestellt werden muß, daß die Funktionswerte $f\,x$ in einem Universum wahr werden, das nicht mehr von x abhängt. Dieser Effekt tritt ganz allgemein bei unserem Limesaxiom auf, das wir auch zum Beweis des Abschlusses von T unter dem Allquantor in Satz 82 benutzt haben. Daher interpretieren wir das Universum $\mathsf{u}\,\beta$ in der Schicht $\mathcal{T}^{\varphi}_{\beta+1}$, woraus sich der zusätzliche Quantor über γ in den Klauseln 13. – 16. ergibt, und benötigen für die Einbettung von $\mathsf{FSU}^{\star}_{\alpha} + (\text{F-I}_{\mathsf{N}})$ bereits die Theorie $\widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1}$.

Im folgenden wollen wir zur Vereinfachung der Darstellung auf die Gödelhäkchen bei den interpretierten Terme verzichten und annehmen, daß die Variablen auf CTer eingeschränkt sind.

Nun stellen wir drei Eigenschaften zusammen, die wir beim Überprüfen der Axiome benötigen.

Lemma 101

1. $\widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1} \vdash \mathsf{U}(u)^* \to \exists \gamma \prec \overline{\alpha}.(\mathsf{T}(u\,x)^* \leftrightarrow \mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\gamma+1}(x)) \wedge (\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(u\,x))^* \leftrightarrow \neg\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\gamma+1}(x))$,

2. $\widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1} \vdash \mathsf{U}(u)^* \to (\exists \gamma.(\mathsf{T}(u\,x)^* \leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\gamma\,x)^*) \wedge (\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(u\,x))^* \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}\,\gamma\,x))^*))$,

3. $\widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1} \vdash \mathsf{U}(u)^* \wedge \mathsf{U}(v)^* \wedge (u \sqsubset v)^* \rightarrow$
$$\exists\gamma, \delta.\gamma \prec \delta \wedge (\mathsf{T}(u\,x)^* \leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\gamma\,x)^*) \wedge (\mathsf{T}(\dot\neg\,(u\,x))^* \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot\neg\,(\mathsf{u}\,\gamma\,x))^*) \wedge$$
$$(\mathsf{T}(v\,x)^* \leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\delta\,x))^* \wedge (\mathsf{T}(\dot\neg\,(v\,x))^* \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot\neg\,(\mathsf{u}\,\delta\,x))^*).$$

Beweis:

1. Nach der Definition von $\mathsf{U}(u)^*$ gilt
$$(\exists\gamma \prec \overline{\alpha}.u = \mathsf{u}\,\gamma) \vee (\exists f.u = \mathsf{lim}\,f \wedge \mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\overline{\alpha}}(\dot\forall y.f\,y\,\dot\vee\,\dot\neg\,(f\,y))).$$
Im ersten Fall erhalten wir dann:
$$\begin{aligned} \mathsf{T}(u\,x)^* &\leftrightarrow \mathcal{T}^{\varphi}_{\overline{\alpha}}(u\,x) \\ &\leftrightarrow \exists\delta \preceq \overline{\alpha}.\mathcal{T}^{\varphi}_{\delta}(u\,x) \\ &\leftrightarrow \exists\delta \preceq \overline{\alpha}.\mathcal{T}^{\varphi}_{\delta}(\mathsf{u}\,\gamma\,x) \\ &\leftrightarrow \mathcal{T}^{\varphi}_{\gamma+1}(\mathsf{u}\,\gamma\,x) \\ &\leftrightarrow \mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\gamma+1}(x). \end{aligned}$$
Für die negativen Terme gilt entsprechend:
$$\begin{aligned} \mathsf{T}(\dot\neg\,(u\,x))^* &\leftrightarrow \mathcal{T}^{\varphi}_{\overline{\alpha}}(\dot\neg\,(u\,x)) \\ &\leftrightarrow \exists\delta \preceq \overline{\alpha}.\mathcal{T}^{\varphi}_{\delta}(\dot\neg\,(u\,x)) \\ &\leftrightarrow \exists\delta \preceq \overline{\alpha}.\mathcal{T}^{\varphi}_{\delta}(\dot\neg\,(\mathsf{u}\,\gamma\,x)) \\ &\leftrightarrow \mathcal{T}^{\varphi}_{\gamma+1}(\dot\neg\,(\mathsf{u}\,\gamma\,x)) \\ &\leftrightarrow \neg\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\gamma+1}(x). \end{aligned}$$
Für Universen der Gestalt $\mathsf{lim}\,f$ folgt die Aussage analog für das kleinste γ, für das $\mathcal{T}^{\varphi}_{\gamma}(\dot\forall y.f\,y\,\dot\vee\,\dot\neg\,(f\,y))$ gilt.

2. Falls u die Gestalt $\mathsf{u}\,\beta$ hat, ist die Aussage trivial, für ein u der Form $\mathsf{lim}\,f$ gibt es ein γ, so daß $\mathcal{T}^{\varphi}_{\gamma}(\dot\forall y.f\,y\,\dot\vee\,\dot\neg\,(f\,y))$ und $\neg\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\gamma}(\dot\forall y.f\,y\,\dot\vee\,\dot\neg\,(f\,y))$ gilt. Dann ergibt sich aus den Abschlußbedingungen 15. und 13. bzw. 16. und 14., daß $\mathsf{T}(\mathsf{lim}\,f\,x)^* \leftrightarrow \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\gamma\,x)^*$ und $\mathsf{T}(\dot\neg\,(\mathsf{lim}\,f\,x))^* \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot\neg\,(\mathsf{u}\,\gamma\,x))^*$.

3. Gelten nun $\mathsf{U}(u)^* \wedge \mathsf{U}(v)^* \wedge (u \sqsubset v)^*$, dann können wir nach 2. minimale γ und δ wählen, so daß $\mathsf{u}\,\gamma$ dem Universum u entspricht und $\mathsf{u}\,\delta$ dem Universum v. Nun zeigen wir $\gamma \prec \delta$: Aus $(u \sqsubset v)^*$ folgt $\mathsf{T}(u\,x)^* \rightarrow \mathsf{T}(v\,(u\,x))^*$. Nehmen wir also ein x mit $\mathcal{T}^{\varphi}_{\overline{\alpha}}(u\,x)$, dann erhalten wir $\mathcal{T}^{\varphi}_{\delta+1}(v\,(u\,x))$ und weiter $\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\delta+1}(u\,x)$. Da γ dem Universum u zugeordnet ist, gilt also $\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\delta+1}(\mathsf{u}\,\gamma\,x)$. Mit Klausel 13. folgt daraus $\gamma \prec \delta$. □

In der ersten Behauptung ist es wesentlich, daß ein Term, der in einem Universum wahr ist, bereits in einer Schicht $\prec \gamma{+}1$ wahr wird. Damit ist aufgrund von Klausel 2. sichergestellt, daß er in der Schicht γ wahr ist, und wir bekommen bei der Verifikation des Abschlusses unter dem Allquantor keine Schwierigkeiten.

Satz 102 $\mathsf{FSU}_\alpha^* + (\text{F-I}_\mathsf{N}) \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1} \vdash \varphi^*$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Herleitungsinduktion.

1. Die Axiome und Regeln, die von TON übernommen wurden, folgen bereits aus der Einbettung von $\mathcal{CTT}$ in PA.

2. Grundaxiome.

   (1) Mit $\mathsf{U}(u)^*$ gibt es nach Lemma 101 ein $\gamma \prec \overline{\alpha}$ mit $\mathsf{T}(u\,x)^* \leftrightarrow \mathcal{T}^\varphi_{\prec\gamma+1}(x)$ und $\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(u\,x))^* \leftrightarrow \neg\mathcal{T}^\varphi_{\prec\gamma+1}(x)$. Also folgt $\mathsf{C}(u)^*$ mit klassischer Logik.

   (2) Für ein Universum u folgt aus $\mathsf{T}(u\,x)^*$, daß $\mathcal{T}^\varphi_\gamma(x)$ für ein $\gamma \prec \overline{\alpha}$ gilt. Mit der ersten Klausel erhalten wir daraus $\mathsf{T}(x)^*$.

3. Abschlußaxiome.

   (3) Aus $\mathsf{T}(u\,(y \doteq z))^*$ folgt $\exists\gamma \prec \overline{\alpha}.\mathcal{T}^\varphi_\gamma(y \doteq z)$ und aufgrund von Klausel 2. auch $(y = z)^*$. Umgekehrt folgt aus $(y = z)^*$ für alle $\gamma \prec \overline{\alpha}$, daß $\mathcal{T}^\varphi_\gamma(y \doteq z)$ gilt, also gilt auch $\mathsf{T}(u\,(y \doteq z))^*$.

   Die Axiome (4) bis (6) ergeben sich analog mit den Klauseln 3. – 5.

   (7) Für ein $\gamma \prec \overline{\alpha}$ gilt mit $\mathsf{T}(u\,x)^*$ auch $\mathcal{T}^\varphi_\gamma(x)$ und mit Klausel 6. folgt $\mathcal{T}^\varphi_\gamma(\dot{\neg}\,(\dot{\neg}\,x)))$, d.h. es gilt $\mathsf{T}(u\,(\dot{\neg}\,(\dot{\neg}\,x)))^*$.

   Die Axiome (8) bis (13) lassen sich wieder analog zeigen.

4. Ordnungsaxiome.

   (14) Nach Lemma 101 gibt es mit $\mathsf{U}(u)^* \wedge \mathsf{U}(v)^* \wedge (u \sqsubset v)^*$ Ordinalzahlen γ und δ mit $\gamma \prec \delta$, so daß sich u durch $\mathsf{u}\,\gamma$ ersetzen läßt und v durch $\mathsf{u}\,\delta$. Dann folgt aber aus $\mathsf{T}(u\,x)^*$, daß $\mathcal{T}^\varphi_\gamma(x)$ gilt und damit auch $\mathcal{T}^\varphi_\delta(x)$, d.h. $\mathsf{T}(v\,x)^*$.

   (15) Mit Lemma 101 folgt dieses Axiom aus der Ordnung der Ordinalzahlen.

   (16) Aus $\mathsf{U}(u)^* \wedge \mathsf{U}(v)^* \wedge (u \equiv v \vee v \sqsubset u)^*$ gibt es mit Lemma 101 Ordinalzahlen γ und δ mit $\delta \preceq \gamma$, so daß sich u durch $\mathsf{u}\,\gamma$ ersetzen läßt und v durch $\mathsf{u}\,\delta$. Angenommen, es gilt $\mathsf{T}(v\,(u\,x))^*$, dann hätten wir $\mathcal{T}^\varphi_\delta(u\,x)$, d.h. auch $\mathcal{T}^\varphi_\delta(\mathsf{u}\,\gamma\,x)$, was mit $\delta \preceq \gamma$ aber nicht möglich ist. Das zweite Konjunktionsglied des Axioms folgt analog.

5. Universen.

   (Univ_α) $\mathsf{U}(\mathsf{u}\,\beta)^*$ ergibt sich für $\beta \prec \overline{\alpha}$ trivial aus der Übersetzung. Nun müssen wir für $\gamma \prec \beta$ noch $(\mathsf{u}\,\gamma \sqsubset \mathsf{u}\,\beta)^*$ zeigen, d.h.

   $$(\mathsf{T}(\mathsf{u}\,\gamma\,x)^* \to \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\mathsf{u}\,\gamma\,x))^*) \wedge (\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}\,\gamma\,x))^* \to \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\neg}\,(\mathsf{u}\,\gamma\,x)))^*).$$

Nehmen wir also für das erste Konjunktionsglied $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,\gamma\,x)^*$ an. Mit Klausel 13. gilt dann $\mathcal{T}^{\varphi}_{\gamma+1}(\mathsf{u}\,\gamma\,x)$, und aus $\gamma \prec \beta$ erhalten wir $\mathcal{T}^{\varphi}_{\beta}(\mathsf{u}\,\gamma\,x)$. Klausel 13. für $\mathsf{u}\,\beta$ liefert somit $\mathcal{T}^{\varphi}_{\beta+1}(\mathsf{u}\,\beta\,(\mathsf{u}\,\gamma\,x))$. Das zweite Konjunktionsglied folgt analog mit Klausel 14.

(Lim_α) Es sei $\beta \prec \gamma \prec \overline{\alpha}$ vorausgesetzt. Dann haben wir als Voraussetzung $\forall x.\mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(f\,x))^* \vee \mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(\dot{\neg}\,(f\,x)))^*$, d.h.

$$\forall x.\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\beta+1}(f\,x) \vee \mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\beta+1}(\dot{\neg}\,f\,x)$$

und weiter für ein $\delta \prec \beta + 1$

$$\mathcal{T}^{\varphi}_{\delta}(\dot{\forall} z.f\,z\,\dot{\vee}\,\dot{\neg}\,(f\,z)) \wedge \neg\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\delta}(\dot{\forall} z.f\,z\,\dot{\vee}\,\dot{\neg}\,(f\,z)). \tag{$\star$}$$

An dieser Stelle geht wieder ein, daß wir für die Interpretation der Universen eine „Nachfolgerschicht" der induktiven Definition gewählt haben. Daher läßt sich spätestens für $\delta = \beta$ das erste Konjunktionsglied von ($\star$) zeigen. Hätten wir die Interpretation so gewählt, daß aus $\mathsf{T}(\mathsf{u}\,\beta\,(f\,x))$ nur $\mathcal{T}^{\varphi}_{\prec\beta}(f\,x)$ folgt, ließe sich für Limeszahlen β im allgemeinen kein Fixpunkt angeben, in dem alle $f\,x$ wahr bzw. falsch sind.

Mit der Interpretation von Universen folgt nun aus ($\star$) $\mathsf{U}(\mathsf{lim}\,f)^*$. Es bleibt zu zeigen

$$(f \sqsubset \mathsf{lim}\,f)^* \wedge (\mathsf{lim}\,f \sqsubset \mathsf{u}\,(\beta+1))^*.$$

Die erste Aussage folgt mit ($\star$) aus den Abschlußregeln 15. und 16. für $\mathsf{lim}\,f$. Für die zweite kann man sich leicht überlegen, daß aus ($\star$)

$$\forall x.\mathcal{T}^{\varphi}_{\beta+1}(\mathsf{lim}\,f\,x) \vee \mathcal{T}^{\varphi}_{\beta+1}(\dot{\neg}\,(\mathsf{lim}\,f\,x))$$

folgt. Daraus erhält man $\mathcal{T}^{\varphi}_{\beta+2}(\mathsf{u}\,(\beta+1)\,(\mathsf{lim}\,f\,x))$ für $\mathsf{T}(\mathsf{lim}\,f\,x)^*$ und $\mathcal{T}^{\varphi}_{\beta+2}(\mathsf{u}\,(\beta+1)\,(\dot{\neg}\,\mathsf{lim}\,f\,x))$ für $\mathsf{T}(\dot{\neg}\,(\mathsf{lim}\,f\,x))^*$, d.h.

$$(\mathsf{lim}\,f \sqsubset \mathsf{u}\,(\beta+1))^*.$$

6. Formelinduktion.

   Die Übersetzung der Formelinduktion folgt mit der Formelinduktion von $\widehat{\mathsf{ID}}_{\alpha+1}$. □

Zusammen mit den Korollaren 98 und 100 folgt aus diesem Satz:

Theorem 103

1. $\mathsf{FSU} + (\mathsf{C}\text{-}\mathsf{I}_{\mathsf{N}}) \trianglelefteq \widehat{\mathsf{ID}}_{<\omega}$,
2. $\mathsf{FSU} + (\mathsf{T}\text{-}\mathsf{I}_{\mathsf{N}}) \trianglelefteq \widehat{\mathsf{ID}}_{<\omega^\omega}$.

2.3.4 FSU mit Formelinduktion

Für die obere Schranke von $\mathsf{FSU}+(\text{F-I}_{\mathsf{N}})$ werden wir wegen der Formelinduktion keine Möglichkeit haben, Schnitte zu eliminieren und analog zu $(\mathsf{C}\text{-I}_{\mathsf{N}})$ und $(\mathsf{T}\text{-I}_{\mathsf{N}})$ eine Einbettung in $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\varepsilon_0}$ vorzunehmen. Ohne näher darauf einzugehen, wollen wir hier nur eine grobe Skizze für das übliche Vorgehen in diesem Fall angeben (vgl. [Can89] für eine ähnliche Wahrheitstheorie über PA oder [GS96] für ein analoges Argument im Kontext applikativer Theorien): In einem ersten Schritt definiert man ein halbformales System FSU^∞, in dem sich die Formelinduktion mit Hilfe der *ω-Regel* ergibt. Diese ist im Fall von applikativen Theorien in der Form

$$\frac{\ldots \overline{n} \neq t \ldots \quad \text{für alle } n < \omega}{\neg \mathsf{N}(t)}$$

zu definieren (s. [Can96, GS96]). Nun zeigt man, daß sich Herleitungen aus $\mathsf{FSU} + (\text{F-I}_{\mathsf{N}})$ in solche von FSU^∞ mit endlichem Schnittrang und Länge kleiner ω^2 übersetzen lassen. Partielle Schnittelimination liefert dann Herleitungen mit Länge kleiner ε_0. Der nächste Schritt ist dann eine asymmetrische Interpretation $\varphi \mapsto \varphi^{(\beta,\beta+2^\alpha)}$ für Herleitungen von FSU^∞ der Länge $< \varepsilon_0$ in $\mathsf{FSU}^{\star\,\infty}_\alpha$ mit $\alpha < \varepsilon_0$. Zum Beweis der oberen Schranke muß man nun all diese Schritte in der Theorie $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\varepsilon_0}$ formalisieren, wodurch sich diese Theorie auch als obere Schranke von $\mathsf{FSU} + (\text{F-I}_{\mathsf{N}})$ ergibt.

2.3.5 Nichtuniformer Limes

In der Theorie UTN von Marzetta, die mit $\mathsf{FSU} + (\mathsf{C}\text{-I}_{\mathsf{N}})$ eng verwandt ist, ist das Limesaxiom in einer *nichtuniformen* Fassung formuliert. Bei einer entsprechenden Axiomatisierung für die Frege-Strukturen mit Universen würde man dafür die Konstante lim weglassen und das Limesaxiom in der folgenden Form angeben:

$$\text{(nu-Lim)} \qquad \forall f.\mathsf{Tf}(f) \to \exists u.\mathsf{U}(u) \wedge f \sqsubset u.$$

Es besteht also kein funktionaler Zusammenhang zwischen der Wahrheitsfunktion und dem darüberliegenden Universum. Nennen wir diese Theorie $\mathsf{FSU}^- + (\text{nu-Lim})$, so kann man weiterhin $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\omega}$ in $\mathsf{FSU}^- + (\text{nu-Lim}) + (\mathsf{C}\text{-I}_{\mathsf{N}})$ einbetten, da sich für eine beliebige natürliche Zahl n mit n-facher Anwendung von (nu-Lim) n übereinanderliegende Universen definieren lassen. Die obere Schranke ergibt sich aus der von $\mathsf{FSU} + (\mathsf{C}\text{-I}_{\mathsf{N}})$, da (nu-Lim) trivial aus dem Limesaxiom von FSU folgt.

Betrachtet man nun den nichtuniformen Limes mit Formelinduktion, so ist aufgrund der fehlenden Uniformität nicht zu sehen, wie man die Konstruktion von Universen ins Transfinite fortsetzen könnte. Dementsprechend läßt sich die Einbettung von $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\varepsilon_0}$ in $\mathsf{FSU} + (\text{F-I}_{\mathsf{N}})$ nicht auf den nichtuniformen Fall übertragen. Allerdings läßt sich analog zu einer Einbettung der (zu $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\omega}$ äquivalenten) Theorie FP_0 von Avigad [Avi96] in $\mathsf{FSU}^- + (\text{nu-Lim}) + (\mathsf{C}\text{-I}_{\mathsf{N}})$ wenigstens die zu $\widehat{\mathsf{ID}}_\omega$ äquivalente Theorie FP in die Theorie mit $(\text{F-I}_{\mathsf{N}})$ einbetten. Es ist aber noch offen, ob diese untere Schranke auch scharf ist.

2.3.6 Konsistenzaxiom

Bei der Untersuchung von Frege-Strukturen mit Universen haben wir bisher das Konsistenzaxiom außer acht gelassen. Der Grund dafür liegt in dem Problem, (Cons) mit Hilfe der iterierten Fixpunkttheorien zu behandeln. Betrachtet man den Fall der (einfachen) Frege-Strukturen, so wird bei der allgemeinen Modellkonstruktion (s. Abs. 2.1.4) deutlich, daß sich die Konsistenzbedingung nicht direkt in $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ zeigen läßt. Wie in Bemerkung 65 angesprochen, läßt sich die Konsistenz allerdings zeigen, wenn man $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ geeignet um Ordinalzahlen erweitert. Dieses Vorgehen würde sich auch im Fall der Universen anbieten, wobei man im Fall der Klasseninduktion auf die von Marzetta und Strahm in [MS9x] eingeführten Ordinalzahltheorien über $\widehat{\mathsf{ID}}_n$ zurückgreifen könnte. Für Wahrheits- und Formelinduktion müßte man diesen Ansatz dann entsprechend ins Transfinite fortsetzen, um Theorien zu erhalten, die die Konsistenz behandeln können.

2.4 Theorien mit Supervaluation

Cantini führt in [Can96, Ch. 12] eine imprädikative Wahrheitstheorie über applikativen Theorien ein, bei der die Wahrheitsaxiome der Frege-Strukturen durch *Supervaluationsaxiome* ersetzt werden. Die Idee von Supervaluation geht auf van Fraassen [vF68, vF70] zurück und besagt im wesentlichen, daß Formeln, die rein logisch folgen, unabhängig von der logischen Komplexität und syntaktischen Struktur ihrer Teilformeln wahr sind (vgl. [Can90, S. 247]). Das bedeutet beispielsweise, daß $\mathsf{T}(\varphi \mathbin{\dot{\rightarrow}} \varphi)$ für beliebige Formeln φ gelten soll. Man kann sich leicht überlegen, daß diese Aussage in Frege-Strukturen für T-negative Formeln φ im allgemeinen nicht beweisbar ist.

Definiert man entsprechende Theorien über PA (s. [Can90]) oder applikativen Theorien (s. [Can96]) erhält man bei Hinzunahme von geeigneter Form vollständiger Induktion eine Theorie, die *beweistheoretisch* äquivalent zu ID_1 ist. Wir zeigen für den applikativen Fall über dieses Ergebnis von Cantini hinaus, daß sich ID_1 auch syntaktisch in diese Theorie einbetten läßt.

2.4.1 Die Theorie SON

Wir definieren nun die Theorie SON (Supervaluation über Theorien von Operationen und Zahlen), die der Theorie VF^- von Cantini [Can96, § 59] entspricht.

Die Sprache $\mathcal{L}_S$ von SON sei die von FON, wobei wir $\dot{\rightarrow}$ als Abkürzung von $(\lambda x, y. \dot{\neg}\,(\dot{\wedge}\,(\dot{\neg}\,x)\,y))$ und die entsprechende Infixnotation verwenden. Wie in Definition 56 läßt sich dann jeder Formel φ ein Term $\dot{\varphi}$ zuordnen.

Die Axiome von SON umfassen die von TON, ausgedehnt auf die neue Sprache, und zusätzlich die folgenden:

I. T-out

(1) $\mathsf{T}(\dot{\varphi}) \rightarrow \varphi$.

II. T-elem

(2) $x = y \rightarrow \mathsf{T}(\dot{=}\, x\, y)$,

(3) $\neg x = y \rightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\, (\dot{=}\, x\, y))$,

(4) $\mathsf{N}(x) \rightarrow \mathsf{T}(\dot{\mathsf{N}}\, x)$,

(5) $\neg \mathsf{N}(x) \rightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\, (\dot{\mathsf{N}}\, x))$.

III. T-imp

(6) $\mathsf{T}(\dot{\varphi} \dot{\rightarrow} \dot{\psi}) \rightarrow (\mathsf{T}(\dot{\varphi}) \rightarrow \mathsf{T}(\dot{\psi}))$.

IV. T-univ

(7) $(\forall x.\mathsf{T}(\dot{\varphi})) \rightarrow \mathsf{T}(\dot{\forall}\, x.\dot{\varphi})$.

V. T-truth

(8) $\mathsf{T}(x) \rightarrow \mathsf{T}(\dot{\mathsf{T}}\, x)$,

(9) $\mathsf{T}(\dot{\neg}\, x) \rightarrow \mathsf{T}(\dot{\neg}\, (\dot{\mathsf{T}}\, x))$.

VI. T-log

(10) $\mathsf{T}(\dot{\varphi})$, falls φ ein *logisches Axiom* ist.

Mit T-log nehmen wir alle Formeln $\mathsf{T}(\dot{\varphi})$ zu SON hinzu, bei denen φ eine $\mathcal{L}_S$-Formel ist, die eine Instanz eines Axioms der Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit ist. Im weiteren betrachten wir für die Supervaluation ganz allgemein $\mathcal{L}_S$-Formeln φ, die sich in SON bereits mit reiner Logik beweisen lassen, d.h. rein unter Verwendung der Axiome und Regeln der Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit (in Zeichen: $\mathsf{RL} \vdash \varphi$).

Im folgenden Lemma stellen wir einfache Folgerungen für SON zusammen, die wir später benötigen:

Lemma 104 [Can96, Lemma 59.2.]

1. Für $\mathcal{L}_S$-Formeln φ mit $\mathsf{RL} \vdash \varphi$ gilt:
$$\mathsf{SON} \vdash \mathsf{T}(\dot{\varphi}).$$
2. $\mathsf{SON} \vdash (\forall x.\mathsf{T}(\dot{\varphi})) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\forall}\, x.\dot{\varphi})$,
3. $\mathsf{SON} \vdash \mathsf{T}(\dot{\varphi}) \wedge \mathsf{T}(\dot{\psi}) \leftrightarrow \mathsf{T}(\dot{\varphi} \dot{\wedge} \dot{\psi})$,

4. $\mathsf{SON} \vdash (\exists x.\mathsf{T}(\varphi)) \to \mathsf{T}(\dot{\exists}\, x.\varphi)$,
5. $\mathsf{SON} \vdash \mathsf{T}(\dot{\varphi}) \vee \mathsf{T}(\dot{\psi}) \to \mathsf{T}(\dot{\varphi} \mathbin{\dot{\vee}} \dot{\psi})$.

Beweis:

1. Die Aussage folgt mit Herleitungsinduktion aus T-log.
2. Die eine Richtung ist Axiom T-univ. Für die andere Richtung erhalten wir mit dem Quantorenaxiom $(\forall x.\varphi) \to \varphi$ und T-log $\mathsf{T}((\forall x.\varphi) \to \varphi)$ und weiter mit T-imp $\mathsf{T}(\forall x.\varphi) \to \mathsf{T}(\varphi)$. Daraus ergibt sich schließlich $\mathsf{T}(\forall x.\varphi) \to \forall x.\mathsf{T}(\varphi)$.
3. Aus den Tautologien $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ und $\varphi \wedge \psi \to \psi$ erhält man mit 1. und T-imp $\mathsf{T}(\dot{\varphi} \mathbin{\dot{\wedge}} \dot{\psi}) \to \mathsf{T}(\dot{\varphi}) \wedge \mathsf{T}(\dot{\psi})$. Die andere Richtung folgt entsprechend aus der Tautologie $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$.
4. Mit $\varphi(t) \to \exists x.\varphi(x)$ folgt aus T-log und T-imp $\mathsf{T}(\dot{\varphi}(t)) \to \mathsf{T}(\dot{\exists}\, x.\dot{\varphi})$, woraus man $(\exists x.\mathsf{T}(\dot{\varphi})) \to \mathsf{T}(\dot{\exists}\, x.\dot{\varphi})$ erhält.
5. Mit $\varphi \to \varphi \vee \psi$ und $\psi \to \varphi \vee \psi$ folgt die Aussage aus T-log und T-imp. □

In SON läßt sich nun die Äquivalenz von (T-I_{N}) und (F-I_{N}) zeigen, was sich aus dem Beweis von Theorem 59.6 in [Can96] ergibt.

Satz 105 In SON sind (T-I_{N}) und (F-I_{N}) äquivalent.

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß sich (F-I_{N}) aus (T-I_{N}) herleiten läßt. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Clos}_{\mathsf{N}}(\psi) \quad &:\Leftrightarrow \quad \psi(0) \wedge \forall x : \mathsf{N}.\psi(x) \to \psi(\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\, x), \\ \psi'(x) \quad &:\Leftrightarrow \quad \mathrm{Clos}_{\mathsf{N}}(\psi) \to \psi(x). \end{aligned}$$

Nun können wir für eine beliebige $\mathcal{L}_S$-Formel ψ zeigen:

$$\mathsf{RL} \vdash \mathrm{Clos}_{\mathsf{N}}(\psi'). \tag{$\star$}$$

$\mathrm{Clos}_{\mathsf{N}}(\psi')$ ist ausgeschrieben $\psi'(0) \wedge \forall x : \mathsf{N}.\psi'(x) \to \psi'(\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\, x)$, wobei $\psi'(0)$ unmittelbar aus der Definition von ψ' folgt. Gelte nun $\mathsf{N}(x)$ und

$$\psi'(x). \tag{1}$$

Dann ist aus

$$\mathrm{Clos}_{\mathsf{N}}(\psi) \tag{2}$$

die Formel $\psi(\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\, x)$ herzuleiten. Mit (2) erhält man aus (1) sofort $\psi(x)$. Diese Formel kann man nun wieder in (die ausgeschriebenen Form) von (2) einsetzen und erhält $\psi(\mathsf{s}_{\mathsf{N}}\, x)$.

Da wir in dieser Argumentation nur reine Logik verwendet haben, gilt ($\star$) bereits in RL und mit Lemma 104.1 folgt:

$$\mathsf{T}(\overset{\cdot}{\overbrace{\mathrm{Clos}_{\mathsf{N}}(\psi')}}) \equiv \mathsf{T}(\overset{\cdot}{\overbrace{\psi'(0) \wedge \forall x : \mathsf{N}.\psi'(x) \to \psi'(\mathsf{s_N}\, x)}}).$$

Nun ziehen wir T nach innen und erhalten mit (T-I_{N})

$$\forall x : \mathsf{N}.\mathsf{T}(\overset{\cdot}{\overbrace{\psi'(x)}}).$$

Mit T-out folgt weiter $\forall x : \mathsf{N}.\psi'(x)$, was ausgeschrieben die Formelinduktion für ψ liefert. $\square$

2.4.2 Beweistheorie

Cantini hat bewiesen, daß die SON+(T-I_{N}) entsprechende Theorie VF_p beweistheoretisch äquivalent zur Theorie ID_1 ist. Die untere Schranke wird dabei durch die Einbettung der (syntaktisch ausdrucksschwächeren) Theorie ID_1(acc) (s. [BFPS81, Ch. I]) gezeigt. Die obere Schranke folgt aus einer Beweisbarkeitsinterpretation (s. [Can96, §63], bzw. [Can90] für eine entsprechende Theorie über PA), bei der VF_p über mehrere Zwischenschritte schließlich in der Theorie KPu der Kripke-Platek-Mengenlehre über den natürlichen Zahlen [Jäg82] modelliert wird, die beweistheoretisch äquivalent zu ID_1 ist.

Zusammen mit Satz 105 erhalten wir damit:

Satz 106 $\mathsf{SON} + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{SON} + (\mathrm{F}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \equiv \mathsf{ID}_1$.

Wir wollen nun zeigen, daß sich ID_1 auch syntaktisch in SON+(T-I_{N}) einbetten läßt, was erneut die Ausdrucksstärke applikativer Theorien verdeutlicht.

Die Theorie ID_1

In der Theorie ID_1, die in der gleichen Sprache wie $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ formuliert ist, axiomatisieren wir nun nicht nur Fixpunkte von induktiven Operatorformen, sondern *kleinste Fixpunkte*. Dazu ersetzen wir das Fixpunktaxiom für induktive Operatorformen φ von $\widehat{\mathsf{ID}}_1$ durch die beiden Axiome:

$$\begin{array}{l} \forall x.\varphi(\mathcal{P}^{\varphi}, x) \to \mathcal{P}^{\varphi}(x), \\ (\forall y.\varphi(\psi, y) \to \psi(y)) \to \forall x.\mathcal{P}^{\varphi}(x) \to \psi(x). \end{array}$$

Einbettung von ID_1 in $\mathsf{SON} + (\mathsf{T}\text{-}\mathsf{I}_\mathsf{N})$

Für die Einbettung von ID_1 brauchen wir noch zwei Eigenschaften von Operatorformen.

Lemma 107 Ist $\varphi(P, x)$ eine P-positive $\mathcal{L}_t$-Formel und ψ eine beliebige $\mathcal{L}_S$-Formel, dann gilt:

1. $\mathsf{RL} \vdash \varphi(\psi, x) \wedge (\forall x.\psi(x) \to \chi(x)) \to \varphi(\chi, x)$.
2. $\mathsf{SON} \vdash \varphi(\mathsf{T}(\overbrace{\psi(\cdot)}^{\cdot}), x) \to \mathsf{T}(\overbrace{\varphi(\psi, x)}^{\cdot})$.

Beweis: Die erste Aussage ergibt sich aus der P-Positivität von $\varphi(P, x)$ durch Induktion über Formelaufbau.

Auch die zweite Aussage folgt mit Induktion über Formelaufbau, wobei wir zuerst $\varphi(P, x)$ in eine Negationsnormalform $\overline{\varphi}(P, x)$ übersetzen, d.h. $\overline{\varphi}(P, x)$ ist mit Hilfe von $\wedge, \vee, \forall$ und $\exists$ aus einfachen und negierten Primformeln aufgebaut. Da sich die Äquivalenz von $\varphi(\mathsf{T}(\overbrace{\psi(\cdot)}^{\cdot}), x)$ und $\overline{\varphi}(\mathsf{T}(\overbrace{\psi(\cdot)}^{\cdot}), x)$ mit Hilfe reiner Logik zeigen läßt, gilt auch $\mathsf{T}(\overbrace{\varphi(\mathsf{T}(\psi(\cdot)), x)}^{\cdot}) \leftrightarrow \mathsf{T}(\overbrace{\overline{\varphi}(\mathsf{T}(\psi(\cdot)), x)}^{\cdot})$.

1. $\overline{\varphi}(\mathsf{T}(\overbrace{\psi(\cdot)}^{\cdot}), x)$ ist eine (positive oder negative) Primformel. Falls die Formel nicht schon die Gestalt $\mathsf{T}(\dot{\psi}(t))$ hat, folgt die Aussage mit T-elem.
2. $\overline{\varphi}(\mathsf{T}(\overbrace{\psi(\cdot)}^{\cdot}), x)$ ist eine zusammengesetzte Formel. Dann folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung mit Lemma 104. $\square$

Wir verwenden in SON im weiteren die folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Clos}_\varphi(\psi) \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x.\varphi(\psi, x) \to \psi(x), \\ \psi'(x) \quad &:\Leftrightarrow \quad \mathrm{Clos}_\varphi(\psi) \to \psi(x). \end{aligned}$$

Nun folgt, daß sich in reiner Logik die φ-Abgeschlossenheit von ψ' zeigen läßt.

Lemma 108 Ist $\varphi(P, x)$ eine P-positive $\mathcal{L}_t$-Formel und ψ eine beliebige $\mathcal{L}_S$-Formel, dann gilt:

$$\mathsf{RL} \vdash \mathrm{Clos}_\varphi(\psi').$$

Beweis: Die Aussage folgt unter Verwendung von Lemma 107 analog zur Aussage $(\star)$ im Beweis von Satz 105: Aus

$$\varphi(\psi', x) \tag{1}$$

und

$$\mathrm{Clos}_\varphi(\psi) \tag{2}$$

müssen wir die Formel $\psi(x)$ herleiten. Mit (2) erhalten wir $\psi' \to \psi$ und wenden Lemma 107.1 auf (1) an, was $\varphi(\psi, x)$ liefert. Das ist die Prämisse (der ausgeschriebenen Form) von (2), und es folgt $\psi(x)$. In dieser Argumentation haben wir nur reine Logik verwendet, so daß die Aussage bereits in RL gilt. $\square$

Wir zeigen weiter, daß sich damit in SON die φ-Abgeschlossenheit bereits für $\mathsf{T}(\overbrace{\psi'(\cdot)}^{\cdot})$ zeigen läßt.

Lemma 109 Ist $\varphi(P, x)$ eine P-positive $\mathcal{L}_t$-Formel und ψ eine beliebige $\mathcal{L}_S$-Formel, dann gilt:

$$\mathsf{SON} \vdash \mathrm{Clos}_\varphi(\mathsf{T}(\overbrace{\psi'(\cdot)}^{\cdot})).$$

Beweis: Aus den Lemmata 108 und 104.1 folgt $\mathsf{SON} \vdash \mathsf{T}(\overbrace{\mathrm{Clos}_\varphi(\psi')}^{\cdot})$. Ausgeschrieben bekommt man daraus mit Lemma 104.2 und Axiom III.(6) in SON

$$\forall x.\mathsf{T}(\overbrace{\varphi(\psi', x)}^{\cdot}) \to \mathsf{T}(\overbrace{\psi'(x)}^{\cdot}).$$

Nun liefert Lemma 107.2

$$\forall x.\varphi(\mathsf{T}(\overbrace{\psi'(\cdot)}^{\cdot}), x) \to \mathsf{T}(\overbrace{\varphi(\psi', x)}^{\cdot}).$$

Zusammen ergibt das genau

$$\mathrm{Clos}_\varphi(\mathsf{T}(\overbrace{\psi'(\cdot)}^{\cdot})).$$ $\square$

Für die Interpretation von ID_1 erweitern wir nun die Interpretation von $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_t$ um die folgende Übersetzung der Fixpunktkonstanten $\mathcal{P}^\varphi$:

$$\mathcal{P}^\varphi(t)^N :\Leftrightarrow \forall z.\mathrm{Clos}_\varphi(\mathsf{T}(z\,\cdot)) \to \mathsf{T}(z\,t).$$

Damit läßt sich zeigen:

Lemma 110 Sei $\varphi(P, x)$ eine induktive Operatorform von $\mathcal{L}_1$. Dann gilt:

1. $\mathsf{SON} \vdash (\forall x.\varphi(\mathcal{P}^\varphi, x) \to \mathcal{P}^\varphi(x))^N$,
2. $\mathsf{SON} \vdash ((\forall y.\varphi(\psi, y) \to \psi(y)) \to \forall x.\mathcal{P}^\varphi(x) \to \psi(x))^N$.

Beweis: Zur Vereinfachung der Darstellung identifizieren wir in diesem Beweis die $\mathcal{L}_1(FP)$-Formeln bis auf die Fixpunktkonstanten mit ihren Übersetzungen und schränken die Variablen auf N ein.

Für 1. nehmen wir also

$$\varphi((\mathcal{P}^\varphi)^N, x) \tag{1}$$

an. Dann ist $\mathcal{P}^{\varphi}(x)^N \equiv \forall z.\mathrm{Clos}_{\varphi}(\mathsf{T}(z\,\cdot)) \to \mathsf{T}(z\,x)$ zu zeigen. Nehmen wir also zusätzlich

$$\mathrm{Clos}_{\varphi}(\mathsf{T}(z\,\cdot)) \tag{2}$$

an. Nun zeigen wir zuerst

$$\forall y.\mathcal{P}^{\varphi}(y)^N \to \mathsf{T}(z\,y) \tag{$\star$}$$

Aus der Voraussetzung $\mathcal{P}^{\varphi}(y)^N \equiv \forall z.\mathrm{Clos}_{\varphi}(\mathsf{T}(z\,\cdot)) \to \mathsf{T}(z\,y)$ erhalten wir mit (2) sofort $\mathsf{T}(z\,y)$, und ($\star$) ist gezeigt. Mit Lemma 107.1 folgt aus (1) und ($\star$)

$$\varphi(\mathsf{T}(z\,\cdot), x),$$

und eine weitere Anwendung von (2) liefert schließlich $\mathsf{T}(z\,x)$.

Für 2. nehmen wir die zweite Prämisse $\mathcal{P}^{\varphi}(x)^N$ an, d.h.

$$\forall z.\mathrm{Clos}_{\varphi}(\mathsf{T}(z\,\cdot)) \to \mathsf{T}(z\,x).$$

Setzen wir nun für z den Term $\lambda x.\overbrace{\psi'(x)}^{\cdot}$ ein, erhalten wir

$$\mathrm{Clos}_{\varphi}(\mathsf{T}(\overbrace{\psi'(\cdot)}^{\cdot})) \to \mathsf{T}(\overbrace{\psi'(x)}^{\cdot}).$$

Mit Lemma 109 erhalten wir also $\mathsf{T}(\overbrace{\psi'(x)}^{\cdot})$ und das Axiom T-out liefert $\psi'(x)$, d.h. $\mathrm{Clos}_{\varphi}(\psi) \to \psi(x)$ oder

$$(\forall y.\varphi(\psi, y) \to \psi(y)) \to \psi(x),$$

womit das zweite Axiom gezeigt ist. □

Da die Induktion von ID_1 in (F-I_{N}) enthalten ist, folgt mit Satz 105, daß sie auch in (T-I_{N}) enthalten ist, und wir erhalten mit dem vorhergehenden Lemma abschließend:

Theorem 111 $\mathsf{ID}_1 \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathsf{SON} + (\mathsf{T}\text{-}\mathrm{I}_{\mathsf{N}}) \vdash \varphi^N.$

Literaturverzeichnis

[Acz77] Peter Aczel. The strength of Martin Löf's intuitionistic type theory with one universe. In Seppo Miettinen and Jonko Väänänen, editors, *Proceedings of the Symposiums on Mathematical Logic in Oulo 1974 and in Helsinki 1975*. Report No. 2 from the Dept. of Philosophy, University of Helsinki, 1977.

[Acz80] Peter Aczel. Frege structures and the notion of proposition, truth and set. In J. Barwise, H. Keisler, and K. Kunen, editors, *The Kleene Symposium*, pages 31–59. North-Holland, 1980.

[AS85] Harold Abelson and Gerald Sussmann. *Structure and Interpretation of Computer Programs*. MIT Press, 1985.

[Avi96] Jeremy Avigad. On the relationship between ATR_0 and $\widehat{\mathsf{ID}}_{<\omega}$. *Journal of Symbolic Logic*, 61(3):768–779, 1996.

[Bar85] Hendrik Barendregt. *The Lambda Calculus*. North Holland, revised edition, 1985.

[Bee85] Michael Beeson. *Foundations of Constructive Mathematics*. Springer, 1985.

[BFPS81] Wilfried Buchholz, Solomon Feferman, Wolfram Pohlers, and Wilfried Sieg. *Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical studies*, volume 897 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1981.

[Can89] Andrea Cantini. Notes on formal theories of truth. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 35:97–130, 1989.

[Can90] Andrea Cantini. A theory of fromal truth arithmetically equivalent to ID_1. *Journal of Symbolic Logic*, 55(1):244–259, 1990.

[Can93] Andrea Cantini. Extending the first-order theory of combinators with self-referential truth. *Journal of Symbolic Logic*, 58(2), 1993.

[Can96] Andrea Cantini. *Logical Frameworks for Truth and Abstraction*. North Holland, 1996.

[CF74] Haskell Curry and Robert Feys. *Combinatory Logic I*. North Holland, 3. edition, 1974.

[CR91] William Clinger and Jonathan Rees, editors. *Revised^4 Report on the Algorithmic Language Scheme*. November 1991.

[Eng83] Erwin Engeler. *Metamathematik der Elementarmathematik*. Springer, 1983.

[Fef64] Solomon Feferman. Systems of predicative analysis. *Journal of Symbolic Logic*, 29(1):1–30, 1964.

[Fef70] Solomon Feferman. Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis. In A. Kino, J. Myhill, and R. Vesley, editors, *Intuitionismus and Proof Theory*, pages 303–326. North Holland, 1970.

[Fef75] Solomon Feferman. A language and axioms for explicit mathematics. In J. Crossley, editor, *Algebra and Logic*, volume 450 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 87–139. Springer, 1975.

[Fef79] Solomon Feferman. Constructive theories of functions and classes. In M. Boffa, D. van Dalen, and K. McAloon, editors, *Logic Colloquium 78*, pages 159–224. North Holland, 1979.

[Fef82] Solomon Feferman. Iterated inductive fixed-point theories: Application to Hancock's conjecture. In G. Metakides, editor, *Patras Logic Symposion*, pages 171–196. North Holland, 1982.

[Fef85] Solomon Feferman. A theory of variable types. *Revista Colombiana de Matemáticas*, XIX:95–105, 1985.

[Fef88] Solomon Feferman. Hilbert's program relativized: Proof-theoretical and foundational reductions. *Journal of Symbolic Logic*, 53(2):364–384, 1988.

[Fef95] Solomon Feferman. Definedness. *Erkenntnis*, 43:295–320, 1995.

[FJ93] Solomon Feferman and Gerhard Jäger. Systems of explicit mathematics with non-constructive μ-operator. Part I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 65(3):243–263, 1993.

[FJ96] Solomon Feferman and Gerhard Jäger. Systems of explicit mathematics with non-constructive μ-operator. Part II. *Annals of Pure and Applied Logic*, 79:37–52, 1996.

[FM87a] Robert Flagg and John Myhill. An extension of Frege structures. In D. Kueker, E. Lopez-Escobar, and C. Smith, editors, *Mathematical Logic and theoretical computer science*, pages 197–217. Dekker, 1987.

[FM87b] Robert Flagg and John Myhill. Implication and analysis in classical Frege structures. *Annals of Pure and Applied Logic*, 34:33–85, 1987.

[vF68] Bas van Fraassen. Presupposition, implication and self-reference. *Journal of Philosophy*, 65:135–152, 1968.

[vF70] Bas van Fraassen. Inference and self-reference. *Synthese*, 21:425–438, 1970.

[Fre1893] Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik; begriffschriftlich abgeleitet*, Band 1. Jena, 1893.

[Fre03] Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik; begriffschriftlich abgeleitet*, Band 2. Jena, 1903.

[Fri70] Harvey Friedman. Iterated inductive definitions and Σ^1_2-AC. In A. Kino, J. Myhill, and R. Vesley, editors, *Intuitionism and Proof Theory*, pages 435–442. North Holland, 1970.

[GS96] Thomas Glaß and Thomas Strahm. Systems of explicit mathematics with non-constructive μ-operator and join. *Annals of Pure and Applied Logic*, 82(2):193–219, 1996.

[HK95] Susumu Hayashi and Satoshi Kobayashi. A new formulation of Feferman's system of functions and classes and its relation to Frege structures. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 6(3):187–202, 1995.

[HS86] James Hindley and Jonathan Seldin. *Introduction to combinators and λ-calculus*. Cambridge University Press, 1986.

[Jäg82] Gerhard Jäger. Zur Beweistheorie der Kripke-Platek-Mengenlehre über den natürlichen Zahlen. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 22:121–139, 1982.

[Jäg84] Gerhard Jäger. The strength of admissibility without foundation. *Journal of Symbolic Logic*, 49(3):867–879, 1984.

[Jäg86] Gerhard Jäger. *Theories for admissible Sets; A unifying Approach to Proof Theory*. Bibliopolis, 1986.

[Jäg88] Gerhard Jäger. Induction in the elementary theory of types and names. In E. Börger et. al., editor, *CSL '87*, volume 329 of *Lecture Notes in Computer Sciences*, pages 118–128. Springer, 1988.

[Jäg93] Gerhard Jäger. Fixed points in Peano arithmetic with ordinals. *Annals of Pure and Applied Logic*, 60:119 – 132, 1993.

[JKS9x] Gerhard Jäger, Reinhard Kahle, and Thomas Strahm. The proof-theoretic analysis of transfinitely iterated fixed point theories. In A. Cantini, E. Casari, and P. Minari, editors, *Logic in Florence '95*. Kluwer, 199x. To appear.

[JKSS9x] Gerhard Jäger, Reinhard Kahle, Anton Setzer, and Thomas Strahm. The proof-theoretic analysis of transfinitely iterated fixed point theories. 199x. Preprint.

[JS95] Gerhard Jäger and Thomas Strahm. Totality in applicative theories. *Annals of Pure and Applied Logic*, 74:105–120, 1995.

[JS96] Gerhard Jäger and Thomas Strahm. Some theories with positive induction of ordinal strength $\varphi\omega 0$. *Journal of Symbolic Logic*, 61(3):818–842, 1996.

[Kah92] Reinhard Kahle. Einbettung des Beweissystems LAMBDA in eine Theorie von Operationen und Klassen. Diplomarbeit, Universität München, Dezember 1992.

[KM77] Alexander Kechris and Yiannis Moschovakis. Recursion in higher types. In Jon Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pages 681–737. North-Holland, 1977.

[ML84] Per Martin-Löf. *Intuitionistic Type Theory.* Bibliopolis, 1984.

[Mar93] Markus Marzetta. Universes in the theory of types and names. In E. Börger et al., editor, *Computer Science Logic '92*, volume 702 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 340–351. Springer, 1993.

[Mar94] Markus Marzetta. *Predicative Theories of Types and Names.* Doktorarbeit, Universität Bern, Institut für Informatik und angewandte Mathematik, 1994.

[MS9x] Markus Marzetta and Thomas Strahm. The μ quantification operator in explicit mathematics with universes and iterated fixed point theories with ordinals. 199x. Preprint, Feb. 1996.

[Par70] Charles Parsons. On a number theoretic choice schema and its relation to induction. In A. Kino, J. Myhill, and R. Vesley, editors, *Intuitionism and Proof Theory*, pages 459–473. North Holland, 1970.

[Schl95] Andreas Schlüter. A theory of rules for enumerated classes of functions. *Archive for Mathematical Logic*, 34:47 – 63, 1995.

[Sch64] Kurt Schütte. Eine Grenze für die Beweisbarkeit der transfiniten Induktion in der verzweigten Typentheorie. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 7:45–60, 1964.

[Sch77] Kurt Schütte. *Proof Theory.* Springer, 1977.

[Sco75] Dana Scott. Combinators and Classes. In C. Böhm, editor, *λ-Calculus and Computer Science Theory*, volume 37 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–26. Springer, 1975.

[Sco79] Dana Scott. Identity and existence in intuitionistic logic. In M. Fourman, C. Mulvey, and D. Scott, editors, *Applications of Sheaves*, volume 753 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 660–696. Springer, 1979.

[Sim86] Stephen Simpson. Subsystems of second order arithmetic. Preprint, 1986ff. Chapters II–V and VII–IX.

[Smi84] Jan Smith. An interpretation of Martin-Löf's type theory in a type-free theory of proposition. *Journal of Symbolic Logic*, 49(3):730–753, 1984.

[Stä9x] Robert Stärk. Applicative theories with explicit substitutions and call-by-value evaluation, 199x. Draft notes, January 23, 1995.

[Str92] Thomas Strahm. Theories with self-application of strength PRA. Lizentiatsarbeit, Universität Bern, Juni 1992.

[Str96a] Thomas Strahm. *On the Proof Theory of Applicative Theories.* Doktorarbeit, Universität Bern, Institut für Informatik und angewandte Mathematik, 1996.

[Str96b] Thomas Strahm. Partial applicative theories and explicit substitutions. *Journal of Logic and Computation*, 6(1):55–77, 1996.

[Tai68] William Tait. Normal derivability in classical logic. In J. Barwise, editor, *The Syntax and Semantic of Infinitary Languages*, volume 72 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 204–236. Springer, 1968.

[Tur90] Raymond Turner. *Truth and Modality for Knowledge Representation.* Pitman, 1990.

[TvD88a] Anne Troelstra and Dirk van Dalen. *Constructivism in Mathematics*, volume I. North Holland, 1988.

[TvD88b] Anne Troelstra and Dirk van Dalen. *Constructivism in Mathematics*, volume II. North Holland, 1988.