Charakterisierungen kleiner Komplexitätsklassen mittels geschichteter N-Prädikate

Diplomarbeit
der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bern

vorgelegt von

Marc Wirz

Leiter der Arbeit: Prof. Dr. G. Jäger,

Institut für Informatik und angewandte Mathematik

1999

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In letzter Zeit wurde in verschiedenen Kontexten die Aufspaltung des Prädikats für die natürlichen Zahlen in zwei oder mehrere Schichten zur Charakterisierung subrekursiver Funktionsklassen wie PT (die in polynomialer Zeit berechenbaren Funktionen) oder $\mathcal{E}^3$ verwendet. Zwei Spielarten dieser Idee werden in dieser Diplomarbeit untersucht. Zuerst werden wir eine rekursionstheoretische Variante, wie sie von Bellantoni zur Charakterisierung von PT eingeführt wurde, so verallgemeinern, dass damit die ganze Grzegorczyk-Hierachie charakterisiert wird. Im zweiten Teil werden wir ein formales Beweissystem betrachten, das von Leivant eingeführt wurde und dessen beweisbar totale Funktionen genau die in PT oder die in $\mathcal{E}^3$ liegenden Funktionen sind, je nachdem, wieviel Induktion zugelassen wird. Wir werden einen neuen Beweis für die unteren Schranken der beweisbar totalen Funktionen dieser Systeme ohne Verwendung von Maschinenmodellen angeben und erste Schritte zur Bestimmung der oberen Schranken mit den Mitteln klassischer Beweistheorie im Stil von Gentzen und Schütte durchführen.
Inspiriert durch eine Charakterisierung von PT mittels einer zweitstufigen Arithmetik mit schwacher Komprehension, die von Leivant [2] eingeführt wurde, definiert Bellantoni [1] eine Funktionsklasse B. Die Argumente von Funktionen aus B treten in zwei Stufen auf, einer oberen und einer unteren. Das entscheidende Definitionsprinzip für Funktionen in B ist das Schema der stratifizierten Rekursion, das verlangt, dass das Rekursionsargument immer ein Argument der oberen Stufe ist, während die rekursiv berechneten Funktionswerte in den Hilfsfunktionen nur als Argumente der unteren Stufe eingesetzt werden dürfen. Bellantoni zeigt dann, dass die Klasse der so definierbaren Funktionen genau mit PT übereinstimmt. Ähnliche Systeme mit stratifizierter Rekursion wurden auch von Leivant selbst [4] vorgestellt.
Viele Charakterisierungen der Grzegorczyk-Hierarchie basieren auf einer Beschränkung der Schachtelungstiefen von Rekursionen in den Funktionsdefinitionen. Am deutlichsten wird dies in den Charakterisierungen von Parsons [6] und Schwichtenberg [10]. Aber auch die übliche Definition kann unter diesem Aspekt interpretiert werden: Wenn wir die beschränkten Rekursionen als unwesentlich ignorieren, sind die Funktionen in der $(n+1)$-ten Grzegorczyk-Klasse $\mathcal{E}^{n+1}$ genau die Funktionen, in deren Definition höchstens n wesentliche Rekursionen verwendet werden. Der Effekt der Stratifizierung im Schema der stratifizierten Rekursion ist, dass über jedes Argument höchstens eine Rekursion möglich ist, d.h. die Schachtelungstiefe von Rekursionen ist maximal 1. Wenn wir statt 2 Stufen $n+1$ Stufen zulassen und im Rekursionschema verlangen, dass die rekursiv berechneten Funktionswerte nur in Stufen eingesetzt werden dürfen, die tiefer sind als die Stufe des Rekursionsarguments, dann wird diese Schachtelungstiefe auf n beschränkt. Dies motivierte die Vermutung, dass ein solches System mit $n+1$ Stufen der Klasse $\mathcal{E}^{n+1}$ entspricht, was in dieser Arbeit bewiesen wird.
Bellantonis Klasse entspricht allerdings der Klasse PT und nicht der zweiten Grzegorzyk-Klasse $\mathcal{E}^2$, die nach Ritchie [8] mit den auf linearem Platz berechenbaren Funktionen übereinstimmt. Dies kommt daher, dass sein Rekursionsschema über die binäre Notation von natürlichen Zahlen läuft, während in der Grzegorczyk-Hierarchie primitive Rekursi-

on über den (unären) natürlichen Zahlen verwendet wird. Diese beiden Schemata sind äquivalent, sobald die Exponentialfunktion vorhanden ist, d.h. ab der dritten Stufe der Grzegorzyk-Hierarchie $\mathcal{E}^3$. Ersetzen wir in Bellantonis System das Rekursionsschema durch stratifizierte primitive Rekursion, so erhalten wir $\mathcal{E}^2$ statt PT.
Leivants Systeme $RT(\mathbb{N})$ und $FT(\mathbb{N})$ wurden erstmals in [3] und [5] beschrieben. Die Schichtung des Prädikats für die natürlichen Zahlen führt dort zu einer Einschränkung des Induktionsschemas: Ein Induktionsbeweis beweist eine Eigenschaft nur für die Elemente der Schichten, die grösser sind als alle in der Induktionsformel vorkommenden. In diesem Kontext spielt es keine Rolle, ob zwei oder eine unendliche Folge von Schichten verwendet werden. Zumindest die beweisbar totalen Funktionen sind in beiden Varianten die gleichen. Es ist hier aber eher natürlicher, mit unendlich vielen Schichten zu arbeiten.
Einen wichtigen Anteil am Zustandekommen dieser Arbeit haben Prof. Gerhard Jäger, der mich in das Gebiet eingeführt hat und sich jederzeit, wenn nötig auch kurzfristig Zeit nahm, und Dr. Thomas Strahm, der in inspirierenden Diskussionen geholfen hat, die richtigen Fragestellungen zu finden, und die ersten Versionen der Beweise sorgfältig nachgelesen hat. Ihnen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

2 Die Klassen B^n

In [1] führen Bellantoni und Cook die Klasse B ein, die die in polynomialer Zeit berechenbaren Funktionen auf eine rein syntaktische rekursionstheoretische Weise charakterisiert. Wir verallgemeinern hier diese Klasse zu einer Hierarchie B^n und zeigen, dass sie oberhalb der Kalmar-elementaren Stufe mit der Grzegorczyk-Hierarchie zusammenfällt.
Funktionen in B unterscheiden zwischen zwei Arten von Argumenten, Bellantoni und Cook nennen sie „safe“ und „normal“. In B^n gibt es n solche Stufen. Zur Verdeutlichung werden Argumente verschiedener Stufen durch Strichpunkte getrennt, und ein Argument x der Stufe k werden wir in der Regel mit $x^{(k)}$ bezeichnen. Obwohl der hochgestellte Index (k) in $x^{(k)}$ im Grunde nicht zur Variablen x gehört, sondern die Stufe bezeichnet, in der x in eine Funktion eingesetzt wird, werden wir diese Notation auch dazu missbrauchen, verschiedene Variablen zu unterscheiden: $x^{(k)}$ und $x^{(l)}$ können verschiedene Werte haben, wenn k und l verschieden sind.

Definition 1 *Für $n \geq 0$ sei B^{n+1} die kleinste Klasse von Funktionen, die die Ausgangsfunktionen 1.-5. enthält und abgeschlossen ist unter stratifizierter primitiver Rekursion und stratifizierter Komposition.*

1. *Die konstante (nullstellige) Funktion* 0.
2. **(Projektion)** $\pi_{k,j}(x_1^{(n)}, \ldots, x_{r_n}^{(n)}; \ldots; x_1^{(0)}, \ldots, x_{r_0}^{(0)}) = x_j^{(k)}$,
   für $0 \leq k \leq n$ *und* $1 \leq j \leq r_k$.
3. **(Nachfolger)** $S(x^{(0)}) = x^{(0)} + 1$.

4. **(Vorgänger)** $P(0^{(0)}) = 0,$
$P(x^{(0)} + 1) = x^{(0)}.$

5. **(Konditional)** $C(0^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = y^{(0)},$
$C(x^{(0)} + 1, y^{(0)}, z^{(0)}) = z^{(0)}.$

6. **(stratifizierte Rekursion)**
$f(\overline{x^{(n)}}; \ldots; \overline{x^{(k+2)}}; \overline{x^{(k+1)}}, 0^{(k+1)}; \overline{x^{(k)}}) = g(\overline{x^{(n)}}; \ldots; \overline{x^{(k+2)}}; \overline{x^{(k+1)}}; \overline{x^{(k)}}),$
$f(\overline{x^{(n)}}; \ldots; \overline{x^{(k+2)}}; \overline{x^{(k+1)}}, v^{(k+1)} + 1; \overline{x^{(k)}}) =$
$h(\overline{x^{(n)}}; \ldots; \overline{x^{(k+2)}}; \overline{x^{(k+1)}}, v^{(k+1)}; \overline{x^{(k)}}, f(\overline{x^{(n)}}; \ldots; \overline{x^{(k+2)}}; \overline{x^{(k+1)}}, v^{(k+1)}; \overline{x^{(k)}})),$
falls g und h aus B^{n+1} sind.

7. **(stratifizierte Komposition)**
$f(\overline{x^{(n)}}; \ldots; \overline{x^{(0)}}) = h(\overline{r^{(n)}}(\overline{x^{(n)}};); \overline{r^{(n-1)}}(\overline{x^{(n)}}; \overline{x^{(n-1)}}); \ldots; \overline{r^{(0)}}(\overline{x^{(n)}}; \ldots; \overline{x^{(0)}})),$
falls $\overline{r^{(n)}}, \ldots, \overline{r^{(0)}}$ und h aus B^{n+1} sind. Die Schreibweise $\overline{r^{(k)}}$ bedeutet natürlich, dass die Funktionswerte als Argumente der k-ten Stufe in h eingesetzt werden.

Bellantoni und Cooks ursprüngliche Klassse B würde in dieser Definition B^2 entsprechen, allerdings ist in B das Schema der stratifizieren primitiven Rekursion durch stratifizierte Rekursion über binäre Notation ersetzt. Während dieser Unterschied für die Charakterisierung der polynomialen Funktionen wesentlich ist, spielt er ab der elementaren Stufe keine Rolle mehr.
Wir werden Funktionen in B^n mit Funktionen in B^{n+k}, die nur Argumente der Stufe kleiner als n haben, identifizieren. In diesem Sinn ist B^n offensichtlich eine Teilmenge von B^{n+k}.
Die Definition der Grzegorczyk-Klassen $\mathcal{E}^n$ basiert auf den folgenden Grundfunktionen:

Definition 2 *Die Funktionen E_n sind definiert durch*

$$\begin{array}{lcl} E_1(x) & = & x^2 + 2 \\ E_{n+1}(0) & = & 2 \\ E_{n+1}(x+1) & = & E_n(E_{n+1}(x)). \end{array}$$

Definition 3 *Für $n \geq 1$ ist $\mathcal{E}^{n+1}$ ist die kleinste Funktionsklasse, die die konstante Nullfunktion, die Nachfolgerfunktion, alle Projektionen und E_n enthält und abgeschlossen ist unter Komposition und dem folgenden Schema der beschränkten primitiven Rekursion: Falls g, h und j aus $\mathcal{E}^{n+1}$ sind, f durch*

$$\begin{array}{lcl} f(0, \overline{x}) & = & g(\overline{x}) \\ f(y+1, \overline{x}) & = & h(y, \overline{x}, f(y, \overline{x})) \end{array}$$

definiert ist und zusätzlich

$$f(y, \overline{x}) \leq j(y, \overline{x})$$

gilt, dann gehört auch f zu $\mathcal{E}^{n+1}$.

Die folgenden bekannten Eigenschaften der Funktionen E_n werden wir im folgenden benötigen. Ihre Beweise sind entweder unproblematisch oder in [9] ausgeführt.

Bemerkung 1 *Für alle $n \geq 1$ gilt:*

i) $E_n(x) \geq x + 1$

ii) $E_n(x+1) \geq E_n(x) + 1$

iii) $E_n(x) \geq 2x$

iv) $E_n(x) \geq x^2$

v) $E_n(x) + E_n(\tilde{x}) \leq \begin{cases} E_n(x+\tilde{x}), & \textit{falls } x, \tilde{x} > 0 \\ E_n(x+\tilde{x}) + 2, & \textit{sonst} \end{cases}$

vi) $E_n^t(x) \leq E_{n+1}(x+t)$

vii) Gehört f zu $\mathcal{E}^{n+1}$, so gibt es eine Zahl m mit

$$f(x_1, \ldots, x_k) \leq E_n^m(max(x_1, \ldots, x_k)).$$

3 B^n enthält $\mathcal{E}^n$

Die folgende Einbettung von $\mathcal{E}^n$ in B^n lehnt sich an den entsprechenden Beweis für B in [1] an, wird aber durch die Verwendung von stratifizierter primitiver Rekursion anstelle von Rekursion über Notation technisch vereinfacht. Das folgende Lemma zeigt, wie Funktionsdefinitionen durch mehrere beschränkte Rekursionen in verschiedenen Variablen durch Rekursionen in einer einzigen Variablen ersetzt werden können, vorausgesetzt, dass ein genügend grosser Wert zur Verfügung gestellt wird, der die Berechnungskomplexität der so definierten Funktion auffangen kann.

Lemma 2 *Zu jeder Funktion f aus $\mathcal{E}^n$ gibt es eine Funktion f' aus B^2 und eine monotone Funktion e_f aus $\mathcal{E}^n$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\overline{x}$ und alle w mit $w \geq e_f(\overline{x})$*

$$f'(w^{(1)}; \overline{x^{(0)}}) = f(\overline{x})$$

gilt. Dabei bezeichnet $\overline{x^{(0)}}$ dieselben Werte wie $\overline{x}$.

Beweis. Wir beweisen dieses Lemma durch Induktion nach der Definition von f in $\mathcal{E}^n$. Zur Vereinfachung der Notation lassen wir Stufenindizes weg und verwenden die Konvention, dass Argumente links des Strichpunkts zur Stufe 1 und rechts des Strichpunkts zur Stufe 0 gehören.
Ist f die Nullfunktion, die Nachfolgerfunktion oder eine Projektion, so definieren wir f' unter Verwendung der entsprechenden Ausgangsfunktionen von B^2. Dabei können wir $e_f = 0$ wählen.

E_{n-1} hat, ausgehend von der Nachfolgerfunktion und den Projektionen, eine Definition durch n beschränkte Rekursionen, jeweils mit Beschränkungsfunktion E_{n-1}. Weil in der folgenden Behandlung der beschränkten Rekursion von der Induktionsvoraussetzung für die Beschränkungsfunktion kein Gebrauch gemacht wird, erhalten wir mit dieser Methode auch E'_{n-1} und $e_{E_{n-1}}$ mit den gewünschten Eigenschaften.
Im Fall der Komposition $f(\overline{x}) = h(\overline{g}(\overline{x}))$ setzen wir $f'(w;\overline{x}) = h'(w;\overline{g'}(w;\overline{x}))$. Weil die $\overline{g}$ aus $\mathcal{E}^n$ sind, sind sie beschränkt durch monotone $\overline{b_g}$ aus $\mathcal{E}^n$. Also erfüllt $e_f(\overline{x}) = e_h(\overline{b_g}(\overline{x})) + \sum_j e_{g_j}(\overline{x})$ den Zweck.
Ist f durch beschränkte Rekursion definiert, so haben wir nach Induktionsvoraussetzung Funktionen g' und h' aus B^2 und definieren

$$\begin{array}{lcl}
\hat{f}(0,w;x,\overline{y}) & = & g'(w;\overline{y}) \\
\hat{f}(v+1,w;x,\overline{y}) & = & C(;x \dot{-} (w \dot{-} (v+1)), \\
 & & \quad g'(w;\overline{y}), \\
 & & \quad h'(w;x \dot{-} (w \dot{-} v), \overline{y}, \hat{f}(v,w;x,\overline{y}))) \\
f'(w;x,\overline{y}) & = & \hat{f}(w,w;x,\overline{y}).
\end{array}$$

Dabei ist die Funktion $W(v,w;x) = x \dot{-} (w \dot{-} v)$ in B^2 mit der Definition

$$\begin{array}{lcl}
\dot{-}(0;x) & = & x \\
\dot{-}(y+1;x) & = & P(\dot{-}(y;x)) \\
W(v,w;x) & = & \dot{-}(\dot{-}(v;w);x).
\end{array}$$

Wir bemerken hier, dass auch die Subtraktion $x \dot{-} y$ mit x und y als Argumenten der Stufe 0 bzw. 1 in B^2 liegt. Dieses Resultat werden wir weiter unten verwenden. Zurück zum Beweis, setzen wir $e_f(x,\overline{y}) = e_g(\overline{y}) + e_h(x,\overline{y},j(x,\overline{y}))$. Dabei können wir annehmen, dass die Beschränkungsfunktion j monoton ist, und damit ist auch e_f monoton. Dann zeigen wir durch Induktion nach u, dass für $w \geq e_f(x,\overline{y})$ und $w - x \leq u \leq w$ gilt:

$$\hat{f}(u,w;x,\overline{y}) = f(x-(w-u),\overline{y}).$$

Ist $u = w - x$, so haben wir $\hat{f}(w-x,w;x,\overline{y}) = g'(w;\overline{y}) = g(\overline{y})$. Im Induktionsschritt gilt

$$\begin{array}{lcl}
\hat{f}(u+1,w;x,\overline{y}) & = & h'(w;x \dot{-} (w \dot{-} u), \overline{y}, \hat{f}(u,w;x,\overline{y})) \\
 & = & h'(w;x-(w-u),\overline{y}, f(x-(w-u),\overline{y})) \\
 & = & h(x-(w-u),\overline{y}, f(x-(w-u),\overline{y})) \\
 & = & f(x-(w-u)+1,\overline{y}) \\
 & = & f(x-(w-(u+1)),\overline{y}).
\end{array}$$

Damit haben wir gezeigt, dass f' und e_f die geforderte Eigenschaft besitzen, denn für alle $w \geq e_f(x,\overline{y})$ ist $f'(w;x,\overline{y}) = \hat{f}(w,w;x,\overline{y}) = f(x,\overline{y})$. □

Theorem 3 *Ist die Funktion $f(x_1,\ldots,x_r)$ in $\mathcal{E}^n$, so ist $f(x_1^{(n-1)},\ldots,x_r^{(n-1)})$ in B^n.*

Beweis. Seien f' und e_f wie im vorhergehenden Lemma. Nach Bemerkung 1.vii) gibt es eine natürliche Zahl m so, dass $e_f(x_1, \ldots, x_r) \leq E_{n-1}^m(max_{1 \leq i \leq r}(x_i))$ ist.
Vorerst weisen wir (in der vereinfachten Notation aus dem vorhergehenden Lemma) für einige Hilfsfunktionen nach, dass sie in B^2 definiert werden können:

$$\begin{array}{lcl} +(0; y) & = & y \\ +(x+1; y) & = & S(+(x; y)) \\ \cdot(x, 0;) & = & 0 \\ \cdot(x, y+1;) & = & +(x; \cdot(x, y;)) \\ max_2(x, y;) & = & +(x \dot{-} y; y) \\ max_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1};) & = & max_2(max_k(x_1, \ldots, x_k;), x_{k+1};), \end{array}$$

wobei die Subtraktion $x \dot{-} y$ wie im Beweis des vorhergehenden Lemmas definiert wird. Ausserdem gehört jede Funktion E_k^m mit $k \leq n-1$ zu B^n:

$$\begin{array}{lcl} E_1(x^{(1)}) & = & S(S(\cdot(x^{(1)}, x^{(1)};))) \\ E_{k+1}(0^{(k+1)}) & = & 2 \\ E_{k+1}(x^{(k+1)}+1) & = & E_k(E_{k+1}(x^{(k+1)})) \\ E_k^0(x^{(k)}) & = & x \\ E_k^{m+1}(x^{(k)}) & = & E_k(E_k^m(x^{(k)})). \end{array}$$

Setzen wir nun

$$f(x_1^{(n-1)}, \ldots, x_r^{(n-1)}) = f'(E_{n-1}^m(max_r(x_1^{(n-1)}, \ldots, x_r^{(n-1)})); x_1^{(n-1)}, \ldots, x_r^{(n-1)}),$$

so liegt die so definierte Funktion f in B^n, und sie stimmt aufgrund des vorhergehenden Lemmas mit dem vorgegebenen f aus $\mathcal{E}^n$ überein. □

4 $\mathcal{E}^n$ enthält B^n

Um einzusehen, dass alle in B^n definierbaren Funktionen zu $\mathcal{E}^n$ gehören, werden wir zeigen müssen, dass das Wachstum, das eine Variable der k-ten Schicht auslösen kann, durch eine Funktion aus $\mathcal{E}^{k+1}$ beschränkt ist. Um diese Eigenschaft zu repräsentieren, definieren wir, für $n \geq k \geq 0$, die $(n-k+2)$-stelligen Funktionen $e_{n,k}$.

Definition 4 $e_{0,0}(z, x) = x + z$
$e_{k,k}(z, x) = E_k^z(x)$, *falls* $k \geq 1$
$e_{n+1,k}(z, x_{n+1}, x_n, \ldots, x_k) = e_{n,k}(E_{n+1}^z(x_{n+1}), x_n, \ldots, x_k)$.

$e_{n,k}(z, x_n, \ldots, x_k)$ ist z.B. $E_k^{E_{k+1}^{\cdot^{\cdot^{E_n^z(x_n)}}}(x_{k+1})}(x_k)$, falls $k \geq 1$, und $e_{n,0}(z, x_n, \ldots, x_1, x_0)$ ist $e_{n,1}(z, x_n, \ldots, x_1) + x_0$. Offensichtlich gehören die Funktionen $e_{n,k}$ zu $\mathcal{E}^{n+2}$, und für jedes feste z ist die Funktion $(x_n, \ldots, x_k) \mapsto e_{n,k}(z, x_n, \ldots, x_k)$ in $\mathcal{E}^{n+1}$. Einige wichtige Eigenschaften der Funktionen $e_{n,k}$ sind:

Lemma 4 *Für alle $n \geq m \geq k \geq 0$:*

i) $e_{n,k}$ *ist streng monoton in jedem seiner Argumente.*

ii) $e_{n,k}(z, x_n, \ldots, x_m^2, \ldots, x_k) \leq e_{n,k}(z+1, x_n, \ldots, x_m, \ldots, x_k)$, *falls* $m \geq 1$

iii) $e_{n,k}(z, x_n, \ldots, 2x_m + 2, \ldots, x_k) \leq e_{n,k}(z+2, x_n, \ldots, x_m, \ldots, x_k)$, *falls* $m \geq 1$

iv) $2e_{n,k}(z, x_n, \ldots, x_k) \leq e_{n,k}(z+1, x_n, \ldots, x_k)$, *falls* $k \geq 1$

v) $e_{n+1,k}(z, x_{n+1}, \ldots, x_{k+1}, 0) \leq e_{n+1,k+1}(z+1, x_{n+1}, \ldots, x_{k+1})$

vi) $e_{n,0}(z, x_n, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \leq e_{n,k}(z+k, x_n, \ldots, x_k)$

vii) $e_{n,k}(z, x_n, \ldots, x_k) \leq e_{n,0}(z, x_n, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$

viii) $e_{n,k}(z, e_{n,n}(\tilde{z}, x_n), x_{n-1}, \ldots, x_k) = e_{n,k}(z + \tilde{z}, x_n, \ldots, x_k)$

ix) $e_{n+1,k}(z, x_{n+1}, \ldots, x_{m+2}, x_{m+1}, e_{n+1,m}(z, x_{n+1}, \ldots, x_{m+2}, \widetilde{x_{m+1}}, x_m), x_{m-1}, \ldots, x_k)$
$\leq e_{n+1,k}(z, x_{n+1}, \ldots, x_{m+2}, x_{m+1} + \widetilde{x_{m+1}} + 2, x_m, x_{m-1}, \ldots, x_k)$.

Beweis.
i) folgt aus der Monotonie der E_k und aus Bemerkung 1.i).
ii) wird durch Induktion nach $n \geq m$ bewiesen. Falls $n = m$, dann gilt unter Verwendung von 1.iv)

$$\begin{aligned} e_{n,k}(z, x_n^2, x_{n-1}, \ldots, x_k) &= e_{n-1,k}(E_n^z(x_n^2), x_{n-1}, \ldots, x_k) \\ &\leq e_{n-1,k}(E_n^z(E_n(x_n)), x_{n-1}, \ldots, x_k) \\ &= e_{n-1,k}(E_n^{z+1}(x_n), x_{n-1}, \ldots, x_k) \\ &= e_{n,k}(z+1, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

Im Induktionsschritt erhalten wir aus der Induktionsvoraussetzung und aus Bemerkung 1.i)

$$\begin{aligned} e_{n+1,k}(z, x_{n+1}, x_n, \ldots, x_m^2, \ldots, x_k) &= e_{n,k}(E_{n+1}^z(x_{n+1}), x_n, \ldots, x_m^2, \ldots, x_k) \\ &\leq e_{n,k}(E_{n+1}^z(x_{n+1}) + 1, x_n, \ldots, x_m, \ldots, x_k) \\ &\leq e_{n,k}(E_{n+1}^{z+1}(x_{n+1}), x_n, \ldots, x_m, \ldots, x_k) \\ &= e_{n+1,k}(z+1, x_{n+1}, x_n, \ldots, x_m, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

Der Beweis von iii) ist fast identisch, wobei in der Verankerung anstelle von 1.iv) nacheinander 1.iii) und 1.i) verwendet werden, und auch iv) wird sehr ähnlich bewiesen mit Induktion über $n \geq k$. Die Induktionsverankerung ist wegen 1.iii) gegeben durch

$$2e_{k,k}(z, x_k) = 2E_k^z(x_k) \leq E_k^{z+1}(x_k) = e_{k,k}(z+1, x_k),$$

und im Induktionsschritt gilt

$$\begin{array}{rcl} 2e_{n+1,k}(z,x_{n+1},x_n,\ldots,x_k) & = & 2e_{n,k}(E^z_{n+1}(x_{n+1}),x_n,\ldots,x_k) \\ & \leq & e_{n,k}(E^z_{n+1}(x_{n+1})+1,x_n,\ldots,x_k) \\ & \leq & e_{n,k}(E^{z+1}_{n+1}(x_{n+1}),x_n,\ldots,x_k) \\ & = & e_{n+1,k}(z+1,x_{n+1},x_n,\ldots,x_k). \end{array}$$

v) wird durch Induktion nach $n \geq k$ bewiesen. Für die Induktionsverankerung, d.h. wenn $n = k$, unterscheiden wir zwei Fälle. Im Fall $k = 0$ gilt die Behauptung durch einfaches Nachrechnen. Ist $k > 0$, so erhalten wir mittels 1.vi)

$$\begin{array}{rcl} e_{k+1,k}(z,x_{k+1},0) & = & E_k^{E^z_{k+1}(x_{k+1})}(0) \\ & \leq & E_{k+1}(E^z_{k+1}(x_{k+1})+0) \\ & = & e_{k+1,k+1}(z+1,x_{k+1}). \end{array}$$

Der Induktionsschritt folgt wie in ii), iii) und iv) aus der Definition von $e_{n+1,k}$, der Induktionsvoraussetzung und Bemerkung 1.i).
vi) folgt unmittelbar aus v) durch Induktion nach k.
vii) ist offensichtlich.
viii) gilt im Fall $n = k$ durch einfaches Nachrechnen und andernfalls wegen

$$\begin{array}{rcl} e_{n+1,k}(z,e_{n+1,n+1}(\tilde{z},x_{n+1}),x_n,\ldots,x_k) & = & e_{n,k}(E^z_{n+1}(E^{\tilde{z}}_{n+1}(x_{n+1})),x_n,\ldots,x_k) \\ & = & e_{n+1,k}(z+\tilde{z},x_{n+1},x_n,\ldots,x_k). \end{array}$$

ix) schliesslich wird durch Induktion nach $n \geq m$ bewiesen. Für die Induktionsverankerung brauchen wir vorerst eine Verallgemeinerung von 1.v):

$$E^z_n(x)+E^z_n(\tilde{x}) \leq \begin{cases} E^z_n(x+\tilde{x}), & \text{falls } x,\tilde{x} > 0 \\ E^z_n(x+\tilde{x}+2), & \text{sonst.} \end{cases} \tag{$*$}$$

Der Beweis von $(*)$ geht induktiv über z. Für $z = 0$ ist die Behauptung offensichtlich. Für den Induktionsschritt bemerken wir, dass $E_n(x), E_n(\tilde{x}) > 0$ und erhalten aus der Induktionsvoraussetzung, 1.v) und 1.ii)

$$\begin{array}{rcl} E^{z+1}_n(x)+E^{z+1}_n(\tilde{x}) & = & E^z_n(E_n(x))+E^z_n(E_n(\tilde{x})) \\ & \leq & E^z_n(E_n(x)+E_n(\tilde{x})) \\ & \leq & \begin{cases} E^z_n(E_n(x+\tilde{x})) & = E^{z+1}_n(x+\tilde{x}), \quad \text{falls } x,\tilde{x} > 0 \\ E^z_n(E_n(x+\tilde{x})+2) & \leq E^{z+1}_n(x+\tilde{x}+2), \quad \text{sonst.} \end{cases} \end{array}$$

Um die Induktionsverankerung von ix) zu beweisen, verwenden wir viii) und $(*)$ und erhalten

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{e_{m+1,k}(z,x_{m+1},e_{m+1,m}(z,\widetilde{x_{m+1}},x_m),x_{m-1},\ldots,x_k)} \\ = & e_{m,k}(E^z_{m+1}(x_{m+1}),e_{m,m}(E^z_{m+1}(\widetilde{x_{m+1}}),x_m),x_{m-1},\ldots,x_k) \\ \leq & e_{m,k}(E^z_{m+1}(x_{m+1})+E^z_{m+1}(\widetilde{x_{m+1}}),x_m,x_{m-1},\ldots,x_k) \\ \leq & e_{m,k}(E^z_{m+1}(x_{m+1}+\widetilde{x_{m+1}}+2),x_m,x_{m-1},\ldots,x_k) \\ = & e_{m+1,k}(z,x_{m+1}+\widetilde{x_{m+1}}+2,x_m,x_{m-1},\ldots,x_k). \end{array}$$

Der Induktionsschritt folgt aus der selben Rechnung, wenn die Induktionsvoraussetzung anstelle von viii) und $(*)$ verwendet wird. $\square$

Lemma 5 *Ist $f(\overline{x^{(n)}};\ldots;\overline{x^{(0)}})$ in B^{n+1}, so gibt es eine natürliche Zahl c_f so, dass*

$$f(\overline{x^{(n)}};\ldots;\overline{x^{(0)}}) \leq e_{n,0}(c_f, max_i(x_i^{(n)}),\ldots,max_i(x_i^{(0)})).$$

Beweis. Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über die Definition von f in B^{n+1}. Kein Problem bieten die Ausgangsfunktionen von B^{n+1}.

Im Fall der Komposition haben wir aus der Induktionsvoraussetzung c_h und $c_{r_i^{(j)}}$. Mit den Abkürzungen $x_j := max(\overline{x^{(j)}})$, $c_j := max_i(c_{r_i^{(j)}})$ und $c := max(c_h, max_j(c_j))$ gilt dann

$$\begin{aligned}
f(\overline{x^{(n)}};\ldots;\overline{x^{(0)}}) &= h(\overline{r^{(n)}}(\overline{x^{(n)}});\ldots;\overline{r^{(0)}}(\overline{x^{(n)}};\ldots;\overline{x^{(0)}})) \\
&\leq e_{n,0}(c_h, max_i(r_i^{(n)}(\overline{x^{(n)}})),\ldots,max_i(r_i^{(0)}(\overline{x^{(n)}};\ldots;\overline{x^{(0)}}))) \\
&\leq e_{n,0}(c_h, e_{n,0}(c_n, x_n, 0,\ldots,0),\ldots,e_{n,0}(c_0, x_n,\ldots,x_0)) \\
&\leq e_{n,0}(c_h, e_{n,n}(c_n+n, x_n),\ldots,e_{n,0}(c_0+0, x_n,\ldots,x_0)) \\
&\leq e_{n,0}(c+2, e_{n,n}(c_n+n, x_n),\ldots,e_{n,1}(c_1+1, x_n,\ldots,x_1), x_0) \\
&\leq e_{n,0}(c+4, e_{n,n}(c_n+n, x_n),\ldots,e_{n,2}(c_2+2, x_n,\ldots,x_2), x_1, x_0) \\
&\vdots \\
&\leq e_{n,0}(c+2n, e_{n,n}(c_n+n, x_n), x_{n-1},\ldots,x_0) \\
&= e_{n,0}(c+c_n+3n, x_n,\ldots,x_0).
\end{aligned}$$

Damit sind wir fertig, indem wir $c_f := c + c_n + 3n$ setzen. (Die erste Ungleichung gilt aufgrund der Induktionsvoraussetzung für h. In der zweiten Ungleichung beobachten wir, dass

$$\begin{aligned}
max_i(r_i^{(j)}(\overline{x^{(n)}};\ldots;\overline{x^{(j)}})) &\leq max_i(e_{n,0}(c_{r_i^{(j)}}, x_n,\ldots,x_j,0,\ldots,0)) \\
&= e_{n,0}(c_j, x_n,\ldots,x_j,0,\ldots,0).
\end{aligned}$$

In der dritten Ungleichung verwenden wir Lemma 4.vi. Die vierte und die folgenden Ungleichungen sind Anwendungen von Lemma 4.ix und 4.iii, sukzessive für $m = 0,1,\ldots,n-1$, und die Gleichheit am Schluss gilt aufgrund von 4.viii. Ist $n = 0$, so darf 4.ix nicht verwendet werden, aber in diesem Fall entfallen diese Anwendungen ohnehin.)

Im Fall einer Rekursion setzen wir erneut $x_j := max(\overline{x^{(j)}})$ und zudem $c := max(c_g, c_h) + k$ und $p_f(x,v) := (v+1)\cdot max(x,v) + 2v$ und beweisen

$$f(\overline{x^{(n)}};\ldots;\overline{x^{(k+1)}}, v;\overline{x^{(k)}}) \leq e_{n,k}(c, x_n,\ldots,x_{k+2}, p_f(x_{k+1},v), x_k) \qquad (*)$$

durch Induktion nach v. Für den Induktionsanfang haben wir aufgrund der Hauptinduktionsvoraussetzung für g und wegen 4.vi

$$\begin{aligned}
f(\overline{x^{(n)}};\ldots;\overline{x^{(k+1)}}, 0;\overline{x^{(k)}}) &= g(\overline{x^{(n)}};\ldots;\overline{x^{(k+1)}};\overline{x^{(k)}}) \\
&\leq e_{n,0}(c_g, x_n,\ldots,x_{k+1}, x_k, 0,\ldots,0) \\
&\leq e_{n,k}(c, x_n,\ldots,x_{k+2}, p_f(x_{k+1},0), x_k).
\end{aligned}$$

Im Induktionsschritt gilt (unter Verwendung von 4.vi und 4.ix – der Fall $n = 0$ ist hier nicht möglich)

$$\begin{aligned}
&f(\overline{x^{(n)}}; \dots ; \overline{x^{(k+1)}}, v+1; \overline{x^{(k)}}) \\
&= \; h(\overline{x^{(n)}}; \dots ; \overline{x^{(k+1)}}, v; \overline{x^{(k)}}, f(\overline{x^{(n)}}; \dots ; \overline{x^{(k+1)}}, v; \overline{x^{(k)}})) \\
&\leq \; e_{n,0}(c_h, x_n, \dots, x_{k+2}, \mathit{max}(x_{k+1}, v), \\
&\qquad\qquad \mathit{max}(x_k, e_{n,k}(c, x_n, \dots, x_{k+2}, p_f(x_{k+1}, v), x_k)), 0, \dots, 0) \\
&= \; e_{n,0}(c_h, x_n, \dots, x_{k+2}, \mathit{max}(x_{k+1}, v), e_{n,k}(c, x_n, \dots, x_{k+2}, p_f(x_{k+1}, v), x_k), 0, \dots, 0) \\
&\leq \; e_{n,k}(c, x_n, \dots, x_{k+2}, \mathit{max}(x_{k+1}, v), e_{n,k}(c, x_n, \dots, x_{k+2}, p_f(x_{k+1}, v), x_k) \\
&\leq \; e_{n,k}(c, x_n, \dots, x_{k+2}, \mathit{max}(x_{k+1}, v) + p_f(x_{k+1}, v) + 2, x_k) \\
&\leq \; e_{n,k}(c, x_n, \dots, x_{k+2}, p_f(x_{k+1}, v+1), x_k)).
\end{aligned}$$

Somit ist $(*)$ bewiesen. Daraus folgt aber mit 4.iii, 4.ii und 4.vii unmittelbar

$$\begin{aligned}
f(\overline{x^{(n)}}; \dots ; \overline{x^{(k+1)}}, v; \overline{x^{(k)}}) &\leq e_{n,k}(c, x_n, \dots, x_{k+2}, p_f(x_{k+1}, v), x_k) \\
&\leq e_{n,k}(c, x_n, \dots, x_{k+2}, (2 \cdot \mathit{max}(x_{k+1}, v) + 2)^2, x_k) \\
&\leq e_{n,k}(c+1, x_n, \dots, x_{k+2}, 2 \cdot \mathit{max}(x_{k+1}, v) + 2, x_k) \\
&\leq e_{n,k}(c+3, x_n, \dots, x_{k+2}, \mathit{max}(x_{k+1}, v), x_k) \\
&\leq e_{n,0}(c+3, x_n, \dots, x_{k+2}, \mathit{max}(x_{k+1}, v), x_k, 0, \dots, 0). \qquad \square
\end{aligned}$$

Theorem 6 *Jede Funktion von B^n liegt in $\mathcal{E}^n$.*

Beweis. Wiederum durch Induktion über die Definition von f in B^n. Die Ausgangsfunktionen liegen alle in $\mathcal{E}^n$ und $\mathcal{E}^n$ ist abgeschlossen unter Komposition. Ausserdem ist jede Instanz von stratifizierter Rekursion aufgrund des vorhergehenden Lemmas eine Instanz von beschränkter Rekursion in $\mathcal{E}^n$. $\square$

5 Leivants Kalküle $\boldsymbol{RT}(\mathbb{N})$ und $\boldsymbol{FT}(\mathbb{N})$

Die Sprache $\mathcal{L}$ ist eine Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit, wobei wir die Negation nur für Atomformeln zur Sprache zählen und für beliebige Formeln via die de Morganschen Regeln definieren. Sie umfasst eine abzählbar unendliche Folge von einstelligen Relationssymbolen $\mathsf{N}_0, \mathsf{N}_1, \dots$, eine unbeschränkte Menge von Funktionssymbolen jeder Stelligkeit, eine ausgezeichnete Konstante $\mathsf{0}$ sowie ein ausgezeichnetes einstelliges Funktionssymbol s für die Nachfolgerfunktion. Statt $\mathsf{N}_j(t)$ werden wir häufig $t \in \mathsf{N}_j$ schreiben. Die Abkürzung $\mathsf{N}_{\vec{\jmath}}(\vec{t})$ steht für $\mathsf{N}_{j_0}(t_0) \wedge \ldots \wedge \mathsf{N}_{j_r}(t_r)$ (falls $\vec{\jmath} \equiv j_0, \dots, j_r$ und $\vec{t} \equiv t_0, \dots, t_r$). Ein Gleichungsprogramm P ist eine Menge von Gleichungen zwischen Termen der Sprache $\mathcal{L}$. Es heisst kohärent, wenn es im Standardmodell eine (partielle) Funktion definiert, vgl. [3] oder [4]. Auf eine exakte Definition verzichten wir, da alle folgenden Überlegungen nicht

von der Kohärenz der verwendeten Gleichungsprogramme abhängen, allerdings haben viele der in den folgenden Kapiteln definierten Kalküle kein Standardmodell, wenn die zugrunde gelegten Gleichungsprogramme nicht kohärent sind.
Die Atomformeln von $\mathcal{L}$ sind alle Gleichungen zwischen Termen von $\mathcal{L}$ und alle Ausdrücke der Form $\mathsf{N}_j(t)$, sowie ihre Negationen. Die Menge der $\mathcal{L}$-Formeln entsteht aus den Atomformeln von $\mathcal{L}$ durch Abschluss unter den logischen Junktoren $\wedge$ und $\vee$ und den Quantoren $\forall$ und $\exists$. Eine $\mathcal{L}$-Formel heisst positiv, wenn in ihr die Relationssymbole N_j nur positiv auftreten. Die logische Komplexität $rk(A)$ einer $\mathcal{L}$-Formel A ist wie üblich definiert, ausser dass Atomformeln der Form $\mathsf{N}_j(t)$ eine höhere Komplexität zugewiesen erhalten als Gleichungen. Die Schichtenkomplexität $lv(A)$ von A ist das grösste j so, dass A eine Teilformel $\mathsf{N}_j(t)$ enthält:

- $rk(t = t') := rk(t \neq t') := 0$
- $rk(\mathsf{N}_j(t)) := rk(\neg\mathsf{N}_j(t)) := 1$
- $rk(A \wedge B) := rk(A \vee B) := max(rk(A), rk(B), 1) + 1$
- $rk(\forall x A) := rk(\exists x A) := max(rk(A), 1) + 1.$

- $lv(t = t') := lv(t \neq t') := -1$
- $lv(\mathsf{N}_j(t)) := lv(\neg\mathsf{N}_j(t)) := j$
- $lv(A \wedge B) := lv(A \vee B) := max(lv(A), lv(B))$
- $lv(\forall x A) := lv(\exists x A) := lv(A).$

Wenn wir verlangen, dass der Rang $rk(A)$ einer zusammengesetzten Formel A immer grösser ist als der Rang einer Atomformel, hat dies nur den Zweck, Beweise durch Induktion nach $rk(A)$ lesbarer zu machen.

Definition 5 *$RT(\mathbb{N})$ und $FT(\mathbb{N})$ enthalten die Schlussregeln und logischen Axiome eines Hilbertkalküls mit Gleichheit. Die nichtlogischen Axiome von $RT(\mathbb{N})$ sind:*

- **Natürliche Zahlen:** *Für alle j*

$$\mathsf{N}_j(\mathsf{0}) \wedge \forall x(\mathsf{N}_j(x) \leftrightarrow \mathsf{N}_j(\mathsf{s}x))$$

- **Stratifizierte Induktion:** *Für alle Formeln $A(x)$ mit $lv(A) < j$*

$$(A[\mathsf{0}] \wedge \forall x(A[x] \to A[\mathsf{s}x])) \to \forall x(\mathsf{N}_j(x) \to A[x]).$$

$FT(\mathbb{N})$ erhalten wir aus $RT(\mathbb{N})$, indem wir die Induktion auf positive Formeln einschränken.

Bemerkung 7

1. *Offensichtlich ist für alle $j > i$ die Formel*

$$\forall x(\mathsf{N}_j(x) \to \mathsf{N}_i(x))$$

in $FT(\mathbb{N})$ beweisbar.

2. *Werden in einer beweisbaren Formel alle Vorkommnisse von N_j für alle j durch N_{j+k} (k fest) ersetzt, bleibt die Formel beweisbar.*

In Leivants Definition von $FT(\mathbb{N})$ ist die Induktion auf positive existentielle (in [3]) bzw. auf positive quantorenfreie Formeln (in [5]) eingeschränkt, dafür nimmt er in [5] noch ein sog. Selektionsschema hinzu, das die Fallunterscheidung auf den natürlichen Zahlen garantiert. In unserer Formulierung brauchen wir für die untere Schranke an einer Stelle stratifizierte Induktion für eine konkrete Formel, die positiv existentiell ist, und sonst nur quantorenfreie Induktion. In der Behandlung gegen oben, soweit sie hier durchgeführt ist, spielen Quantorenkomplexitäten keine Rolle.

Definition 6 *Eine zahlentheoretische Funktion f heisst beweisbar total in $RT(\mathbb{N})$ bzw. $FT(\mathbb{N})$, falls es ein kohärentes Gleichungsprogramm P und natürliche Zahlen $\vec{k}$ so gibt, dass in $RT(\mathbb{N})$ (bzw. $FT(\mathbb{N})$) die Formel*

$$\forall P \to (\mathsf{N}_{\vec{k}}(\vec{x}) \to \mathsf{N}_0(f(\vec{x})))$$

herleitbar ist. Dabei bezeichne $\forall P$ die Konjunktion der universellen Abschlüsse aller Gleichungen in P. Zur Verdeutlichung sagen wir auch, f sei beweisbar total von $\mathsf{N}_{\vec{k}}$ nach N_0 oder $f : \mathsf{N}_{\vec{k}} \to \mathsf{N}_0$ sei beweisbar total.

Aus der obigen Bemerkung folgt sofort, dass die beweisbar totalen Funktionen von $RT(\mathbb{N})$ und von $FT(\mathbb{N})$ unter Komposition abgeschlossen sind, genauer: Ist $h(\overline{x}) = f(\overline{g}(\overline{x}))$ und sind $f : \mathsf{N}_j^n \to \mathsf{N}_0$ und $g_1, \ldots, g_n : \mathsf{N}_k^m \to \mathsf{N}_0$ beweisbar total, so ist es auch $h : \mathsf{N}_{j+k}^m \to \mathsf{N}_0$.

Lemma 8 *Die iterierte Exponentialfunktion 2_n, die durch $2_0(x) = x$ und $2_{n+1}(x) = 2^{2_n(x)}$ definiert ist, ist in $RT(\mathbb{N})$ beweisbar total von N_n nach N_0.*

Beweis. Wir geben nur die wesentlichen Punkte an und verweisen für Details auf Leivant [3] oder [5]. Wir wählen ein Gleichungsprogramm, das die Gleichungen $e(x, \mathsf{0}) = \mathsf{s}(x)$, $e(x, \mathsf{s}(y)) = e(e(x, y), y)$ und $\exp(x) = \exp(\mathsf{0}, x)$ enthält. Es gilt $\exp(x) = 2^x$, und exp ist beweisbar total von N_1 nach N_0. Da 2_n die n-fache Komposition von exp mit sich selbst ist, ist somit $2_n : \mathsf{N}_n \to \mathsf{N}_0$ beweisbar total. □

Dieser Beweis verwendet Induktion für die Formel $A(u) \equiv (\forall v \in \mathsf{N}_0)(e(v, u) \in \mathsf{N}_0)$, die nicht positiv ist, daher ist es kein Beweis für die Totalität von exp in $FT(\mathbb{N})$.

Lemma 9 *Jede Funktion* $f(x_0^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}; x_0^{(0)}, \ldots, x_{m-1}^{(0)})$ *aus* B^2 *ist in* $FT(\mathbb{N})$ *beweisbar total von* $\mathsf{N}_k^n \times \mathsf{N}_0^m$ *nach* N_0 *für ein geeignetes* k.

Beweis. Einfache Induktion nach der Definition von f in B^2. Als Gleichungsprogramm können wir immer die Definition von f in B^2 wählen.
Trivial sind die Fälle der Nullfunktion, der Projektionen und der Nachfolgerfunktion. Für die Vorgängerfunktion beweisen wir zuerst

$$(\forall x \in \mathsf{N}_0)(x = \mathsf{0} \vee (\exists v)(x = \mathsf{s}v)) \tag{$*$}$$

durch Induktion für die Formel $x = \mathsf{0} \vee (\exists v)(x = \mathsf{s}v)$. Aus $x \in \mathsf{N}_0$ und $x = \mathsf{s}v$ erhalten wir auch $v \in \mathsf{N}_0$ und somit

$$(\forall x \in \mathsf{N}_0)(x = \mathsf{0} \vee (\exists v \in \mathsf{N}_0)(x = \mathsf{s}v)).$$

Da wir sowohl aus $x = \mathsf{0}$ als auch aus $x = \mathsf{s}v \wedge v \in \mathsf{N}_0$ auf $P(x) \in \mathsf{N}_0$ schliessen können, folgt aus den Definitionsgleichungen für P

$$(\forall x \in \mathsf{N}_0)(P(x) \in \mathsf{N}_0).$$

Der Fall für das Konditional folgt in ähnlicher Weise aus $(*)$ und der Tatsache, dass sowohl aus $x = \mathsf{0} \wedge y \in \mathsf{N}_0$ als auch aus $x = \mathsf{s}v \wedge z \in \mathsf{N}_0$ auf $C(x, y, z) \in \mathsf{N}_0$ geschlossen werden kann.
Die einzige Form von stratifizierter Rekursion in B^2 ist

$$\begin{aligned}
&f(\overline{x^{(1)}}, 0^{(1)}; \overline{y^{(0)}}) = g(\overline{x^{(1)}}; \overline{y^{(0)}})\\
&f(\overline{x^{(1)}}, v^{(1)} + 1; \overline{y^{(0)}}) = h(\overline{x^{(1)}}, v^{(1)}; \overline{y^{(0)}}, f(\overline{x^{(1)}}, v^{(1)}; \overline{y^{(0)}})).
\end{aligned}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir für geeignete k_0 und k_1

$$(\forall \overline{x} \in \mathsf{N}_{k_0})(\forall \overline{y} \in \mathsf{N}_0)(g(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathsf{N}_0)$$

und

$$(\forall \overline{x}, v \in \mathsf{N}_{k_1})(\forall \overline{y}, z \in \mathsf{N}_0)(h(\overline{x}, v, \overline{y}, z) \in \mathsf{N}_0).$$

Wir setzen $A(v) := \mathsf{N}_{k_1}(v) \wedge \mathsf{N}_0(f(\overline{x}, v, \overline{y}))$ und $k := max(k_0, k_1 + 1)$. Unter der Voraussetzung $\mathsf{N}_k(\overline{x}) \wedge \mathsf{N}_0(\overline{y})$ erhalten wir $A[0]$ wie auch $A[v] \to A[\mathsf{s}v]$. Daraus schliessen wir mittels einer stratifizierten Induktion auf

$$(\forall v \in \mathsf{N}_k)A(v)$$

und erhalten daraus

$$(\forall v \in \mathsf{N}_k)(f(\overline{x}, v, \overline{y}) \in \mathsf{N}_0).$$

Dass die beweisbar totalen Funktionen von $FT(\mathbb{N})$ unter Komposition abgeschlossen sind, haben wir schon weiter oben bemerkt, und die Bedingungen an die Schichten N_k folgen aus einer leichten Verfeinerung der dort gemachten Überlegungen: Ist $f(\overline{x}; \overline{y}) = h(\overline{r}(\overline{x};); \overline{t}(\overline{x}; \overline{y}))$ und sind $h : \mathsf{N}_j^l \times \mathsf{N}_0^p \to \mathsf{N}_0$, $r_1, \ldots, r_l : \mathsf{N}_k^n \to \mathsf{N}_0$ und $t_1, \ldots, t_p : \mathsf{N}_{j+k}^n \times \mathsf{N}_0^m \to \mathsf{N}_0$ beweisbar total, so ist es auch $f : \mathsf{N}_{j+k}^n \times \mathsf{N}_0^m \to \mathsf{N}_0$.

□

Korollar 10 *Jede Funktion aus $\mathcal{E}^2$ ist beweisbar total in $FT(\mathbb{N})$.*

Beweis. Nach Lemma 3 wissen wir, dass jede Funktion aus $\mathcal{E}^2$ in B^2 definiert werden kann. Daher folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Lemma. $\square$

Korollar 11 *Jede Funktion aus $\mathcal{E}^3$ ist beweisbar total in $RT(\mathbb{N})$.*

Beweis. Aus Lemma 2 wissen wir, dass es für jede Funktion f aus $\mathcal{E}^3$ eine Funktion f' aus B^2 und eine monotone Funktion e_f aus $\mathcal{E}^3$ so gibt, dass für alle $\overline{x}$ und alle w mit $w \geq e_f(\overline{x})$

$$f'(w^{(1)}; \overline{x^{(0)}}) = f(\overline{x})$$

gilt. Aufgrund von Bemerkung 1.vii) und wegen $E_2(x) \leq 2_3(x)$ können wir annehmen, dass $e_f(\overline{x}) = 2_{3m}(max_i(x_i))$ ist. Aus dem obigen Lemma erhalten wir, dass $f' : \mathsf{N}_k \times \mathsf{N}_0^n \to \mathsf{N}_0$ in $RT(\mathbb{N})$ beweisbar total ist. Weil die Maximumsfunktion ebenfalls in B^2 ist und weil die beweisbar totalen Funktionen von $RT(\mathbb{N})$ unter Komposition abgeschlossen sind, erhalten wir aus dem Lemma und aus Lemma 8 auch die Totalität von $e_f : \mathsf{N}_{3m+k'}^n \to \mathsf{N}_0$. Wenn wir somit als Gleichungsprogramm für f die Vereinigung der Gleichungsprogramme für f' und e_f mit $\{f(\overline{x}) = f'(e_f(\overline{x}), \overline{x})\}$ wählen, erhalten wir, dass f in $RT(\mathbb{N})$ beweisbar total von $\mathsf{N}_{3m+k'+k}$ nach N_0 ist. $\square$

6 Tait-Kalküle für $RT(\mathbb{N})$ und $FT(\mathbb{N})$

In diesem Abschnitt führen wir mit G_P und G_P^* zwei äquivalente Umformulierungen der Theorie ein, die wir erhalten, wenn wir $RT(\mathbb{N})$ um ein festes Gleichungsprogramm P erweitern, sowie die Varianten G_P^r und $\mathsf{G}_P^{*,\mathsf{r}}$ mit eingeschränkter Induktion, die $FT(\mathbb{N})$ entsprechen. Zur Vorbereitung definieren wir in Abhängigkeit von P und einer beliebigen Menge von Gleichungen Λ eine Gleichheitsrelation $=$ und eine liberalere Äquivalenzrelation $\sim$. Diese Relationen werden dazu dienen, alle Instanzen von Gleichungen in P sowie die üblichen Gleichheitsaxiome so als Axiome der in diesem Abschnitt zu definierenden Kalküle einzuführen, dass eine partielle Schnittelimination möglich bleibt. Der Fall der Gleichheitsaxiome macht es nötig, ausser den Gleichungen aus P noch weitere Gleichungen zuzulassen, die in Λ zusammengefasst werden.

Definition 7

- $P, \Lambda \models t = t$ *für alle Terme* t,
- $P, \Lambda \models t[\vec{r}/\vec{x}] = t'[\vec{r}/\vec{x}]$ *für alle Terme* $\vec{r} = r_0, \dots, r_{n-1}$*, alle Variablen* $\vec{x} = x_0, \dots, x_{n-1}$ *und für jede Gleichung* $t = t'$ *oder* $t' = t$ *aus* P,
- $P, \Lambda \models t = t'$ *für jede Gleichung* $t = t'$ *oder* $t' = t$ *aus* Λ,
- $P, \Lambda \models t = t' \implies P, \Lambda \models r[t] = r[t']$ *für alle Terme* r.

- $P, \Lambda \models t = t'$ *und* $P, \Lambda \models t' = t'' \quad \Longrightarrow \quad P, \Lambda \models t = t''$
- $P, \Lambda \models \mathsf{s}t = \mathsf{s}t' \quad \Longrightarrow \quad P, \Lambda \models t = t'$.

- $P, \Lambda \models t \sim t'$, *falls* $P, \Lambda \models t = t'$
- $P, \Lambda \models t \sim t' \quad \Longrightarrow \quad P, \Lambda \models t \sim \mathsf{s}t'$ *und*
  $P, \Lambda \models t \sim \mathsf{s}t' \quad \Longrightarrow \quad P, \Lambda \models t \sim t'$.

Beide Relationen sind für jedes P und jedes Λ abgeschlossen unter Symmetrie, Transitivität und Reflexivität.

Bemerkung 12

$$P, \Lambda \models t \sim \overline{n} \text{ für ein Numeral } \overline{n} \quad \Longrightarrow \quad \text{es gibt ein Numeral } \overline{m} \text{ so, dass } P, \Lambda \models t = \overline{m}.$$

Beweis. Triviale Induktion nach Herleitung von $P, \Lambda \models t \sim t'$. □

Die Sprache der Kalküle G_P, G_P^*, $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r}}$ und $\mathsf{G}_P^{*,\mathsf{r}}$ ist $\mathcal{L}$. Zur Formulierung der Axiome und Schlussregeln und der Definition der Komplexität von Herleitungen führen wir noch zwei abkürzende Schreibweisen ein. Ist $\Lambda \equiv \{p_1 = q_1, \ldots, p_n = q_n\}$, so bezeichnet $\neg\Lambda$ die Menge $\{p_1 \neq q_1, \ldots, p_n \neq q_n\}$, und für die Formelmenge $\Gamma \equiv \{A_1, \ldots, A_n\}$ setzen wir $lv(\Gamma) := max_{i \leq n}(lv(A_i))$.

Definition 8 *Die Axiome und Regeln von* G_P *sind*

I) **Axiome**

(a) $\Gamma, \neg\Lambda, \neg\mathsf{N}_j(t), \mathsf{N}_j(t')$, *falls* $P, \Lambda \models t \sim t'$, *für alle* j.

(b) $\Gamma, \neg\Lambda, \mathsf{N}_j(t)$, *falls* $P, \Lambda \models \mathsf{0} \sim t$, *für alle* j.

(c) $\Gamma, \neg\Lambda, t = t'$, *falls* $P, \Lambda \models t = t'$, *für alle* j.

II) *Die üblichen Regeln für* $\wedge, \vee, \forall$ *und* $\exists$.

III) **Induktion**

$$\frac{\Gamma, A[\mathsf{0}] \qquad \Gamma, \neg A[x], A[\mathsf{s}x]}{\Gamma, \neg\Lambda, \neg\mathsf{N}_j(t), A[t']}$$

falls $P, \Lambda \models t \sim t'$, $lv(A) < j$ *und* x *in* $\Gamma, A[\mathsf{0}]$ *nicht frei vorkommt.*

IV) **Schnitt**

$$\frac{\Gamma, \neg A \qquad \Gamma, A}{\Gamma}$$

Der Kalkül G_P^* *erweitert* G_P *um die kombinierten Schlussfiguren*

III+IV) *Unter den gleichen Voraussetzungen wie bei der Induktion*

1. $$\frac{\Gamma, A[\mathsf{0}] \qquad \Gamma, \neg A[x], A[\mathsf{s}x] \qquad \Gamma, \neg\mathsf{N}_j(t), \neg A[t']}{\Gamma, \neg\Lambda, \neg\mathsf{N}_j(t)}$$ *und*

2. $$\frac{\Gamma, A[\mathsf{0}] \qquad \Gamma, \neg A[x], A[\mathsf{s}x] \qquad \Gamma, \mathsf{N}_j(t) \qquad \Gamma, \neg A[t']}{\Gamma, \neg\Lambda}$$

$\mathsf{G}_P^{\mathsf{r}}$ *und* $\mathsf{G}_P^{*,\mathsf{r}}$ *erhalten wir aus* G_P *bzw.* G_P^**, indem wir die Induktionsregel und (im Fall von* $\mathsf{G}_P^{*,\mathsf{r}}$*) die kombinierten Schlussregeln auf positive Formeln einschränken.*

Die kombinierten Schlussregeln sind Kombinationen der Induktionsregel mit einem bzw. mit zwei Schnitten. Ihre Einführung ändert somit nichts an der Beweiskraft der Kalküle, hingegen erleichtern sie die partielle Schnittelimination beträchtlich, indem sie die nicht eliminierbaren Schnitte an sich binden.
Die Formel A eines Schnitts, die Formel $A[t']$ der ersten kombinierten Schlussregel und die Formeln $A[t']$ und $\mathsf{N}_j(t)$ der zweiten kombinierten Schlussregel heissen Schnittformeln der entsprechenden Schlussregel. Die Formel A einer Induktion oder einer kombinierten Schlussregel heisst Induktionsformel. Der *Rang* eines Schnitts ist die logische Komplexität der Schnittformel, die *Schicht* eines Schnitts oder einer kombinierten Schlussregel ist die grösste der Schichtenkomplexitäten aller Schnittformeln des Schlusses. Den kombinierten Schlussregeln wird kein Rang zugeordnet, da bei der Schnittelimination der Rang ihrer Schnittformeln unerheblich sein wird.

Definition 9 (Komplexität von Herleitungen) *Sei* $\star$ *einer der Kalküle* G_P*,* G_P^**,* $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r}}$ *oder* $\mathsf{G}_P^{*,\mathsf{r}}$*.*

1. *Falls* Γ *ein Axiom von* $\star$ *ist, dann gilt* $\star \vdash^{n}_{k,j} \Gamma$ *für alle natürlichen Zahlen* j*,* n *und* k*.*

2. *Gilt* $\star \vdash^{n_i}_{k,j} \Gamma_i$ *für die Prämissen* Γ_i *eines logischen Schlusses, einer Induktion, eines Schnitts mit Rang kleiner als* k *und Schicht kleiner als* j *oder (im Fall von* G_P^* *oder* $\mathsf{G}_P^{*,\mathsf{r}}$*) eines kombinierten Schlusses mit Schicht kleiner als* j*, und ist* $n_i < n$ *für alle* i*, dann gilt* $\star \vdash^{n}_{k,j} \Gamma$ *für die Konklusion* Γ *dieses Schlusses.*

Die Schnittformeln von gewöhnlichen Schnitten werden also bezüglich ihrer logischen Komplexität als auch bezüglich ihrer Schichtenkomplexität gezählt, die Schnittformeln der kombinierten Schlussregeln nur bezüglich ihrer Schichtenkomplexität. Die abkürzenden Notationen $\star \vdash_{k,i} \Gamma, \star \vdash_{i} \Gamma$ und $\star \vdash \Gamma$ bedeuten $\exists n \star \vdash^{n}_{k,i} \Gamma, \exists k \star \vdash_{k,i} \Gamma$ bzw. $\exists i \star \vdash_{i} \Gamma$.
Die folgenden drei Lemmata zeigen einige für Tait-Kalküle übliche Eigenschaften auf, die wir häufig und meist stillschweigend verwenden werden. Sie werden sehr leicht durch Induktion nach n bewiesen, für Details sei auf [7] verwiesen. Der Platzhalter $\star$ steht erneut für G_P, G_P^*, $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r}}$ oder $\mathsf{G}_P^{*,\mathsf{r}}$.

Lemma 13 $\star \vdash^{n}_{k,j} \Gamma, \quad n \leq m, \; k \leq l$ *und* $j \leq i \quad \Longrightarrow \quad \star \vdash^{m}_{l,i} \Gamma.$

Lemma 14 (Abschwächungslemma) $\star \vdash^{n}_{k,j} \Gamma$ *und* $\Gamma \subset \Delta \quad \Longrightarrow \quad \star \vdash^{n}_{k,j} \Delta$.

Lemma 15 (Substitutionslemma) *Für alle Variablen x und Terme t:*

$$\star \vdash^{n}_{k,j} \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \star \vdash^{n}_{k,j} \Gamma[t/x].$$

Die Schreibweise $\Gamma[t/x]$ im Substitutionslemma bedeutet, dass in jeder Formel aus Γ der Term t für die Variable x substituiert werden soll. Aufgrund des Abschwächungslemmas werden wir immer annehmen können, dass die Hauptformel eines Schlusses in jeder Prämisse dieses Schlusses enthalten ist.
Auch das folgende Lemma gehört in der einen oder anderen Form schon fast zur „eisernen Ration“ für Tait-Kalküle. Es würde schon für $\mathsf{G}^{\mathsf{r}}_P$ gelten, aber wir benötigen es nur für $\mathsf{G}^{*,\mathsf{r}}_P$ und G^{*}_P.

Lemma 16 (Tautologielemma) *Für jede Formel A und für alle Terme t und t' gilt:*

$$P, \Lambda \models t = t' \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{G}^{*,\mathsf{r}}_P \vdash^{2rk(A)}_{0,0} \neg\Lambda, \neg A[t], A[t'].$$

Beweis. Induktion über $rk(A)$.
Im Fall $rk(A) = 0$ ist A die Formel $p = q$. Weil P, Λ die Gleichung $t = t'$ erfüllt, erfüllt $P, \Lambda, p[t] = q[t]$ die Gleichungen $p[t'] = p[t]$, $p[t] = q[t]$ und $q[t] = q[t']$ und wegen Transitivität auch $p[t'] = q[t']$. Somit ist $\mathsf{G}^{*}_P \vdash^{0}_{0,0} \neg\Lambda, p[t] \neq q[t], p[t'] = q[t']$ ein Axiom.
Falls $rk(A) = 1$, so ist A die Formel $\mathsf{N}_j(r)$. Es gilt dann auch $P, \Lambda \models r[t] \sim r[t']$, und $\mathsf{G}^{*}_P \vdash^{2}_{0,0} \neg\Lambda, \neg\mathsf{N}_j(r[t]), \mathsf{N}_j(r[t'])$ ist ein Axiom.
Ist $rk(A) > 1$, so gehen wir vor wie üblich, vgl. z.B. [7]. □

Die Verbindung zwischen $RT(\mathbb{N})$ und G_P bzw. zwischen $FT(\mathbb{N})$ und $\mathsf{G}^{\mathsf{r}}_P$ wird durch das folgende Einbettungslemma hergestellt.

Lemma 17

1. $RT(\mathbb{N}) \vdash A \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{G}_P \vdash A$.
2. $FT(\mathbb{N}) \vdash A \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{G}^{\mathsf{r}}_P \vdash A$.

Beweis. Induktion über die Herleitung von A in $RT(\mathbb{N})$ bzw. in $FT(\mathbb{N})$.
Für den Fall der logischen Axiome und der Schlussregeln verweisen wir auf [7]. Die Gleichheitsaxiome und die Axiome über die natürlichen Zahlen sind in der Definition von $P, \Lambda \models t = t'$ eingebaut. Die Instanzen des Induktionsaxioms folgen aus der Induktionsregel von G_P bzw. von $\mathsf{G}^{\mathsf{r}}_P$. □

Eine Funktion f heisst beweisbar total in G_P, falls G_P für geeignete natürliche Zahlen $\vec{k}$ die Formel

$$\mathsf{N}_{\vec{k}}(\vec{x}) \rightarrow \mathsf{N}_0(f(\vec{x}))$$

beweist. Ersetzen wir in dieser Definition und im folgenden Korollar G_P durch $\mathsf{G}^{\mathsf{r}}_P$ und $RT(\mathbb{N})$ durch $FT(\mathbb{N})$, bleibt das Korollar richtig.

Korollar 18 *Für jede in $RT(\mathbb{N})$ beweisbar totale Funktion f gibt es ein Gleichungsprogramm P so, dass f auch in G_P beweisbar total ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein Gleichungsprogramm P so, dass $RT(\mathbb{N})$ die Formel $\forall P \to (\mathsf{N}_{\vec{k}}(\vec{x}) \to \mathsf{N}_0(f(\vec{x})))$ beweist. Aufgrund des Lemmas ist diese Formel auch in G_P herleitbar, und somit ist es auch die Formelmenge $\neg P, \mathsf{N}_{\vec{k}}(\vec{x}) \to \mathsf{N}_0(f(\vec{x}))$. Weil $P \models t = t'$ für jede Gleichung $t = t'$ aus P gilt, sind alle Formelmengen $\mathsf{N}_{\vec{k}}(\vec{x}) \to \mathsf{N}_0(f(\vec{x})), t = t'$ mit $t = t'$ aus P Axiome von G_P, und wir erhalten mit einigen Schnitten $\mathsf{N}_{\vec{k}}(\vec{x}) \to \mathsf{N}_0(f(\vec{x}))$.

□

7 Partielle Schnittelimination für G_P

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass für den Beweis einer Sequenz keine höheren Schichten notwendig sind, als in der Sequenz selbst vorkommen. Dieses Resultat mag nicht besonders interessant erscheinen, es könnte aber zur Bestimmung exakter oberer Schranken für die Beweiskraft der untersuchten Kalküle notwendig sein. Ein Vorgehen durch Induktion über Schichten wird beispielsweise erst dadurch erfolgversprechend. Ob sich exakte obere Schranken mit den Mitteln der reinen Beweistheorie überhaupt finden lassen, ist allerdings zur Zeit noch unklar.
Auch im diesem Abschnitt bleiben alle Lemmata und alle Beweise richtig, wenn wir alle Kalküle mit voller Induktion durch ihre Entsprechungen mit eingeschränkter Induktion ersetzen.

Lemma 19

$$\mathsf{G}_P^* \,\frac{n_0}{k,i}\, \Gamma, \neg A, \quad \mathsf{G}_P^* \,\frac{n_1}{k,i}\, \Gamma, A, \quad rk(A) = k > 0,\ lv(A) < i \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{G}_P^* \,\frac{}{k,i}\, \Gamma.$$

Beweis. Induktion über $n_0 + n_1$. Wenn A oder $\neg A$ nicht Hauptformel der letzten Inferenz war, folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Andernfalls unterscheiden wir zwei Fälle.

1. $rk(A) = 1$, d.h. $A \equiv \mathsf{N}_j(t)$ mit $j < i$.
   Es können folgende Unterfälle auftreten:

   (a) $\neg A$ ist Hauptformel der ersten der kombinierten Schlussregeln, d.h.

$$\begin{aligned} &\mathsf{G}_P^* \,\frac{m_0}{k,i}\, \Gamma, \neg\mathsf{N}_j(t), B[0], \\ &\mathsf{G}_P^* \,\frac{m_1}{k,i}\, \Gamma, \neg\mathsf{N}_j(t), \neg B[x], B[\mathsf{s}x] \text{ und} \\ &\mathsf{G}_P^* \,\frac{m_2}{k,i}\, \Gamma, \neg\mathsf{N}_j(t), \neg B[t'], \end{aligned}$$

   wobei $P, \Lambda \models t \sim t'$ mit $\neg\Lambda \subset \Gamma$, $lv(B) < j < i$ und $n_0 > m_0, m_1, m_2$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned} &\mathsf{G}_P^* \,\frac{}{k,i}\, \Gamma, B[0], \\ &\mathsf{G}_P^* \,\frac{}{k,i}\, \Gamma, \neg B[x], B[\mathsf{s}x] \text{ und} \\ &\mathsf{G}_P^* \,\frac{}{k,i}\, \Gamma, \neg B[t'], \end{aligned}$$

und wir können mit der zweiten der kombinierten Schlussregeln auf $\mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i} \Gamma, \neg\Lambda$ schliessen.

(b) $\neg A$ ist die erste Hauptformel einer Induktion, d.h.

$$\mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i}^{m_0} \Gamma, \neg\mathsf{N}_j(t), B[\mathsf{0}] \quad \text{und} \quad \mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i}^{m_1} \Gamma, \neg\mathsf{N}_j(t), \neg B[x], B[\mathsf{s}x],$$

Γ enthält die Formel $B[t']$, $P, \Lambda \models t \sim t'$ mit $\neg\Lambda \subset \Gamma$, $lv(B) < j$ und $n_0 > m_0, m_1$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i} \Gamma, B[\mathsf{0}] \quad \text{und} \quad \mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i} \Gamma, \neg B[x], B[\mathsf{s}x],$$

und ausserdem gilt

$$\mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i} \Gamma, \neg B[t'], B[t'].$$

Mit der zweiten der kombinierten Schlussregeln können wir auf $\mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i} \Gamma, \neg\Lambda, B[t']$ schliessen.

(c) A oder $\neg A$ ist die zweite Hauptformel einer Induktion, d.h.

$$\mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i}^{m_0} \Gamma, A[t'], A[\mathsf{0}] \quad \text{und} \quad \mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i}^{m_1} \Gamma, A[t'], \neg A[x], A[\mathsf{s}x],$$

Γ enthält eine Formel $\neg\mathsf{N}_l(t)$, $P, \Lambda \models t \sim t'$ mit $\neg\Lambda \subset \Gamma$, $lv(A) < l$ und $n_0 > m_0, m_1$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i} \Gamma, A[\mathsf{0}] \quad \text{und} \quad \mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i} \Gamma, \neg A[x], A[\mathsf{s}x].$$

Mit der ersten der kombinierten Schlussregeln können wir auf $\mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i} \Gamma, \neg\Lambda, \neg\mathsf{N}_l(t)$ schliessen.

(d) A und $\neg A$ sind beides Hauptformel eines Axioms.
Dann enthält Γ Formeln $\mathsf{N}_j(t'), \neg\Lambda$ mit $P, \Lambda \models t \sim t'$, und es gilt entweder $P, \Lambda \models t \sim \mathsf{0}$ oder Γ enthält eine Formel $\neg\mathsf{N}_j(t'')$ mit $P, \Lambda \models t'' \sim t$. Dann gilt aber auch $P, \Lambda \models t' \sim \mathsf{0}$ bzw. $P, \Lambda \models t'' \sim t'$, also ist Γ selbst ein Axiom.

2. $rk(A) > 1$. Falls A oder $\neg A$ die zweite Hauptformel einer Induktion ist, gehen wir gleich vor wie im Fall 1.(c). Sonst wurden A und $\neg A$ beide mit derselben (logischen) Schlussregel hergeleitet, und wir können vorgehen wie üblich. □

Aus diesem Lemma erhalten wir in üblicher Weise, dass in G_P^* die Schnittregel auf Formeln mit logischer Komplexität 0 eingeschrankt werden könnte, ohne die Beweiskraft zu verändern. Ausführliche Beweise der beiden folgenden Lemmata (das erste durch Induktion nach Herleitungslänge, das zweite nach der logischen Schnittkomplexität) sind in [7] zu finden.

Lemma 20 $\mathsf{G}_P^* \vdash_{k+1,i} \Gamma$ *und* $k > 0 \implies \mathsf{G}_P^* \vdash_{k,i} \Gamma$.

Lemma 21 $\mathsf{G}_P^* \vdash_{i} \Gamma \implies \mathsf{G}_P^* \vdash_{1,i} \Gamma$.

Nun wenden wir uns der Reduktion der Schichtenkomplexität der Schnittformeln eines Beweises zu. Analog zu Lemma 19 wird der zentrale Fall in einem separaten Lemma behandelt, hier die Elimination der zweiten kombinierten Schlussregel.

Lemma 22 *Falls*

$$\begin{array}{llll} \mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{n_0}{1,i}} \Gamma, A[\mathsf{0}], & \mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{n_1}{1,i}} \Gamma, \neg A[x], A[\mathsf{s}x], & & \mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{n_2}{1,i}} \Gamma, \mathsf{N}_i(t), \\ \mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{n_3}{1,i}} \Gamma, \neg A[t'], & P, \Lambda \models t \sim t',\ lv(A) < i & \textit{und} & lv(\Gamma) \leq i, \end{array}$$

dann gilt $\mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{}{1,i}} \Gamma, \neg\Lambda$.

Beweis. Induktion über n_2. Wenn $\mathsf{N}_i(t)$ nicht Hauptformel der letzten Inferenz war, folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. (Im Fall der kombinierten Schnittregeln, bei denen eine Formel A geschnitten wird, ist $lv(A) < i$, d.h. $lv(\Gamma, A) \leq i$, deshalb greift die Induktionsvoraussetzung.)
Andernfalls ist $\mathsf{N}_i(t)$ Hauptformel eines Axioms oder einer Induktion. Eine Induktion kann es aber nicht sein, sonst würde Γ eine Formel $\neg\mathsf{N}_j(t'')$ mit $j > lv(\mathsf{N}_i(t)) = i$ enthalten, im Widerspruch zu $lv(\Gamma) \leq i$.
Somit muss $\Gamma, \mathsf{N}_i(t)$ ein Axiom sein. Den zwei Arten von Axiomen entsprechend können zwei Fälle eintreten:

1. Γ enthält Formeln $\neg\mathsf{N}_i(t''), \neg\Delta$ mit $P, \Delta \models t'' \sim t$.
   Wegen $P, \Lambda, \Delta \models t'' \sim t'$ ergibt dann eine Induktion

   $$\mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{}{1,i}} \Gamma, \neg\Lambda, \neg\Delta, \neg\mathsf{N}_i(t''), A[t'],$$

   woraus wir mit einem Schnitt auf $\mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{}{rk(A)+1,i}} \Gamma, \neg\Lambda, \neg\Delta, \neg\mathsf{N}_i(t'')$ schliessen können. Diese Formelmenge ist aber gerade $\Gamma, \neg\Lambda$, und mit Lemma 21 folgt $\mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{}{1,i}} \Gamma, \neg\Lambda$.

2. $P, \Delta \models t \sim \mathsf{0}$ mit $\neg\Delta \subset \Gamma$.
   Dann gilt auch $P, \Lambda, \Delta \models t' \sim \mathsf{0}$ und damit $P, \Lambda, \Delta \models t' = \overline{m}$ für ein Numeral $\overline{m}$. Wir haben

   $$\begin{array}{l} \mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{n_0}{1,i}} \Gamma, A[t'], A[\mathsf{0}], \\ \mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{n_1}{1,i}} \Gamma, A[t'], \neg A[\mathsf{0}], A[\overline{1}], \\ \mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{n_1}{1,i}} \Gamma, A[t'], \neg A[\overline{1}], A[\overline{2}], \\ \vdots \\ \mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{n_1}{1,i}} \Gamma, A[t'], \neg A[\overline{m-1}], A[\overline{m}] \end{array}$$

   und wegen Lemma 16 ausserdem

   $$\mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{}{1,0}} \Gamma, \neg\Lambda, \neg\Delta, \neg A[\overline{m}], A[t'].$$

   Daraus folgt durch eine Reihe von Schnitten $\mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{}{rk(A)+1,i}} \Gamma, \neg\Lambda$ und ebenfalls mit Lemma 21 schliesslich $\mathsf{G}_P^* \mathrel{|\!\frac{}{1,i}} \Gamma, \neg\Lambda$. $\square$

Lemma 23 $\mathsf{G}_P^* \vdash^{n}_{1,i} \Gamma, \quad lv(\Gamma) = j \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{G}_P^* \vdash_{1,max(j,0)} \Gamma.$

Beweis. Hauptinduktion über i, Nebeninduktion über n.
Wenn die letzte Inferenz keinen Schnitt enthielt, folgt die Behauptung aus der Nebeninduktionsvoraussetzung, ebenso im Falle eines Schnitts mit Schnittformel A, wenn $lv(A) < j$ oder $lv(A) = j = -1$ ist. Wir nehmen also an, dass Γ Konklusion einer der kombinierten Schlussregeln mit Schnittformel A und $lv(A) \geq j$ ist. Es kann aber nicht die erste der kombinierten Schlussregeln gewesen sein, sonst würde Γ eine Formel $\neg\mathsf{N}_k(t)$ mit $k > lv(A) \geq j$ enthalten, im Widerspruch zu $lv(\Gamma) = j$.
Also wurde Γ mit der zweiten kombinierten Schlussregel hergeleitet, und wir haben

$$\begin{aligned}
&\mathsf{G}_P^* \vdash^{n_0}_{1,i} \Gamma, B[0],\\
&\mathsf{G}_P^* \vdash^{n_1}_{1,i} \Gamma, \neg B[x], B[\mathsf{s}x],\\
&\mathsf{G}_P^* \vdash^{n_2}_{1,i} \Gamma, \mathsf{N}_k(t) \text{ und}\\
&\mathsf{G}_P^* \vdash^{n_3}_{1,i} \Gamma, \neg B[t']
\end{aligned}$$

mit $P, \Lambda \models t \sim t'$, $\neg\Lambda \subset \Gamma$, $lv(B) < k < i$ und $n_0, n_1, n_2, n_3 < n$. Die Nebeninduktionsvoraussetzung ergibt

$$\begin{aligned}
&\mathsf{G}_P^* \vdash_{1,k} \Gamma, B[0],\\
&\mathsf{G}_P^* \vdash_{1,k} \Gamma, \neg B[x], B[\mathsf{s}x],\\
&\mathsf{G}_P^* \vdash_{1,k} \Gamma, \mathsf{N}_k(t) \text{ und}\\
&\mathsf{G}_P^* \vdash_{1,k} \Gamma, \neg B[t'].
\end{aligned}$$

Aus dem vorhergehenden Lemma folgt $\mathsf{G}_P^* \vdash_{1,k} \Gamma$ und aus der Hauptinduktionsvoraussetzung schliesslich $\mathsf{G}_P^* \vdash_{1,max(j,0)} \Gamma$. □

Korollar 24 $\mathsf{G}_P \vdash \Gamma, \quad lv(\Gamma) = j \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{G}_P \vdash_{max(j,0)} \Gamma.$

Beweis. Bemerke, dass $\mathsf{G}_P \vdash_i \Gamma \Longleftrightarrow \mathsf{G}_P^* \vdash_i \Gamma$ und wende Lemmata 21 und 23 an. □

8 Asymmetrische Interpretation von $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$ in H

Zur Behandlung mit einer asymmetrischen Interpretation eignet sich ein kanonischer Tait-Kalkül wie $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$ besser als $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r}}$ und $\mathsf{G}_P^{*,\mathsf{r}}$. Die Sprache von $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$ ist die von G_P, eingeschränkt auf die Schichten bis und mit N.

Definition 10 (Axiome und Regeln von $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$)

***I)* Axiome**

(a) $\Gamma, \neg\mathsf{N}_j(t), \mathsf{N}_j(t),$ *für alle* j.

(b) $\Gamma, \mathsf{N}_j(\mathsf{0})$,   *für alle j.*

(c) $\Gamma, t = t'$,   *falls* $P \models t = t'$.

II) **s-Regeln** $\dfrac{\Gamma, \mathsf{s}t = \mathsf{s}t'}{\Gamma, t = t'}$, $\dfrac{\Gamma, \mathsf{N}_j[t]}{\Gamma, \mathsf{N}_j[\mathsf{s}t]}$ *und* $\dfrac{\Gamma, \mathsf{N}_j[\mathsf{s}t]}{\Gamma, \mathsf{N}_j[t]}$.

III) **Gleichheit** $\dfrac{\Gamma, A[t]}{\Gamma, t \neq t', A[t']}$ *für alle positiven Atomformeln A.*

IV) *Die üblichen Regeln für* $\wedge, \vee, \forall$ *und* $\exists$.

V) **Induktion** *Für alle positiven Formeln A:*

$$\frac{\Gamma, A[\mathsf{0}] \qquad \Gamma, \neg A[x], A[\mathsf{s}x]}{\Gamma, \neg \mathsf{N}_j(t), A[t]}$$

falls $lv(A) < j$ *und* x *in* $\Gamma, A[\mathsf{0}]$ *nicht frei vorkommt.*

VI) **Schnitt**

$$\frac{\Gamma, \neg A \qquad \Gamma, A}{\Gamma}$$

Die Komplexitäten von Herleitungen in $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$ werden analog zu $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r}}$ definiert. Wir schreiben $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N} \vdash_{*} \Gamma$, falls Γ eine Herleitung in $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$ besitzt, in der alle Schnittformeln (bzw. ihre Negationen) positiv sind. Die Abschwächungs- und Substitutionslemmata gelten auch für $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$.
$\mathsf{G}_P^{\mathsf{r}}$ und $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$ sind äquivalent im folgenden Sinn:

Bemerkung 25 $\mathsf{G}_P^{*,\mathsf{r}} \vdash_{\overline{1,N+1}} \Gamma \Longleftrightarrow \mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N} \vdash_{*} \Gamma$.

Die Richtung von rechts nach links ist fast trivial (für die Gleichheits-Regel werden Lemma 16 und Lemma 21 verwendet). Für die Richtung von links nach rechts bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} \Lambda \models t = t' &\implies \mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N} \vdash_{\overline{0,0}} \neg\Lambda, t = t' \\ \text{und} \quad \Lambda \models t \sim t' &\implies \mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N} \vdash_{*} \neg\Lambda, \neg\mathsf{N}_j(t), \mathsf{N}_j(t') \end{aligned}$$

gilt. Auf Details verzichten wir, denn was wir wirklich benötigen, ist nur ein Korollar zu dieser Bemerkung, das wir alternativ auch als Konkatenation der folgenden zwei Standard-Lemmata erhalten könnten.

Lemma 26 $FT(\mathbb{N}) \vdash A \implies \mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N} \vdash A$.

Lemma 27 $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N} \vdash \Gamma \implies \mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N} \vdash_{*} \Gamma$.

Wir interpretieren nun $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$ in einem Kalkül H, dessen Sprache keine Relationssymbole N_j mehr hat, dafür ein zweistelliges Relationssymbol $<$. Die Übersetzung von $\mathcal{L}$-Formeln in Formeln in der Sprache von H ist durch die folgende Definition gegeben.

Definition 11 *Für die $\mathcal{L}$-Formel A, die höchstens die Schichten N_0 bis N_N enthält, und die natürlichen Zahlen $\vec{n} = n_0, \ldots, n_N$ und $\vec{m} = m_0, \ldots, m_N$ ist die $(\vec{n}, \vec{m})$-Interpretation $A^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix}$ von A definiert durch*

- $\neg\mathsf{N}_j(t)^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix} := \neg(t < \overline{n_j})$
- $\mathsf{N}_j(t)^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix} := t < \overline{m_j}$
- $(A \wedge B)^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix} := A^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix} \wedge B^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix}$
- $(A \vee B)^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix} := A^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix} \vee B^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix}$
- $(\forall x A)^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix} := \forall x A^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix}$
- $(\exists x A)^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix} := \exists x A^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix}$

Die $(\vec{n}, \vec{m})$-Interpretation $\Gamma^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix}$ einer Menge Γ von $\mathcal{L}$-Formeln ist die Formelmenge, die aus den $(\vec{n}, \vec{m})$-Interpretationen der Elemente von Γ besteht.

Definition 12 (Axiome und Regeln von H)

I) **Axiome**

(a) $\Theta, \neg(t < \overline{n}), t < \overline{m},$ *für alle* $n \leq m$.

(b) $\Theta, 0 < \overline{m},$ *für alle* $m > 0$.

(c) $\Theta, t = t',$ *falls* $P \models t = t'$.

II) **s-Regeln** $\dfrac{\Theta, \mathsf{s}t = \mathsf{s}t'}{\Theta, t = t'}$, $\dfrac{\Theta, t < \overline{n}}{\Theta, \mathsf{s}t < \overline{n+1}}$ *und* $\dfrac{\Theta, \mathsf{s}t < \overline{n}}{\Theta, t < \overline{n}}$.

III) **Gleichheit** $\dfrac{\Theta, A[t]}{\Theta, t \neq t', A[t']}$

IV) *Die üblichen Regeln für $\wedge, \vee, \forall$ und $\exists$.*

V) **Induktion**

$$\frac{\Theta, A[\overline{m}] \qquad \text{für alle } m < n}{\Theta, \neg(t < \overline{n}), A[t]}$$

VI) **Schnitt**

$$\frac{\Theta, \neg A \qquad \Theta, A}{\Theta}$$

Wie üblich bei asymmetrischen Interpretationen benötigen wir noch eine Persistenzeigenschaft. Den offensichtlichen Beweis lassen wir weg.

Lemma 28 (Persistenz) *Gilt* $\mathsf{H} \vdash \Theta, A^*\begin{pmatrix} n_0 & m_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & m_N \end{pmatrix}$ *und sind* $n_j \geq n'_j$ *und* $m_j \leq m'_j$ *für alle* $0 \leq j \leq N$*, so gilt auch* $\mathsf{H} \vdash \Theta, A^*\begin{pmatrix} n'_0 & m'_0 \\ \vdots & \vdots \\ n'_N & m'_N \end{pmatrix}$.

Ausserdem erfüllt auch H die Abschwächungs- und Substitutionslemmata.

Lemma 29 *Falls* $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N} \,|\!\frac{n}{*}\, \Gamma$*, so gibt es Funktionen* $b_0(x_N, \ldots, x_1; x_0), \ldots, b_N(; x_N)$ *aus* B^2 *mit* $b_i(x_N, \ldots, x_{i+1}; x_i) \geq x_i$ *und der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen* $n_N, \ldots, n_0$

$$\mathsf{H} \vdash \Gamma^*\begin{pmatrix} n_0 & b_0(n_N,\ldots,n_1;n_0) \\ \vdots & \vdots \\ n_N & b_N(;n_N) \end{pmatrix}$$

gilt.

Beweis. Induktion über n. Wir unterscheiden nach der zuletzt angewendeten Schlussregel folgende Fälle:

1. Ist Γ ein Axiom von $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r},N}$, so können wir $b_i(x_N, \ldots, x_{i+1}; x_i) := x_i + 1$ wählen.

2. Wurde Γ mit einer s-Regel oder der Gleichheitsregel hergeleitet, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung.

3. Im Fall einer $(\wedge)$-Einführung mit Hauptformel $A \wedge B$ haben wir aus der Induktionsvoraussetzung Funktionen $\vec{c}$ und $\vec{d}$ mit

$$\mathsf{H} \vdash (\Gamma, A)^*\begin{pmatrix} n_0 & c_0(n_N,\ldots,n_1;n_0) \\ \vdots & \vdots \\ n_N & c_N(;n_N) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathsf{H} \vdash (\Gamma, B)^*\begin{pmatrix} n_0 & d_0(n_N,\ldots,n_1;n_0) \\ \vdots & \vdots \\ n_N & d_N(;n_N) \end{pmatrix}.$$

   Aus der Diskussion der Klassen B^n können wir sehen, dass B^n mit f und g immer auch eine Funktion h enthält, die f und g majorisiert. Damit können wir die b_i so wählen, dass sie die Bedingungen des Lemmas erfüllt sind. In Zukunft werden wir in solchen Fällen annehmen, dass $c_i = d_i$.

4. Die anderen logischen Schlussregeln folgen in ähnlicher Weise.

5. Als nächstes behandeln wir den Fall, dass Γ mit einem Schnitt mit positiver Schnittformel A hergeleitet wurde. Aus der Induktionsvoraussetzung haben wir Funktionen $\vec{c}$ und $\vec{d}$ mit

$$\mathsf{H} \vdash (\Gamma, A)^*\begin{pmatrix} n_0 & c_0(n_N,\ldots,n_1;n_0) \\ \vdots & \vdots \\ n_N & c_N(;n_N) \end{pmatrix}$$
$$\text{und} \quad \mathsf{H} \vdash (\Gamma, \neg A)^*\begin{pmatrix} c_0(n_N,\ldots,n_1;n_0) & d_0(c_N(;n_N),\ldots,c_1(n_N,\ldots,n_2;n_1);c_0(n_N,\ldots,n_1;n_0)) \\ \vdots & \vdots \\ c_N(;n_N) & d_N(;c_N(;n_N)) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt mit dem Persistenzlemma

$$\begin{aligned} &\mathsf{H} \vdash \Gamma^*\begin{pmatrix} n_0 & d_0(c_N,\ldots,c_1;c_0) \\ \vdots & \vdots \\ n_N & d_N(;c_N) \end{pmatrix}, A^*\begin{pmatrix} n_0 & c_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & c_N \end{pmatrix} \\ \text{und}\quad &\mathsf{H} \vdash \Gamma^*\begin{pmatrix} n_0 & d_0(c_N,\ldots,c_1);c_0) \\ \vdots & \vdots \\ n_N & d_N(;c_N) \end{pmatrix}, (\neg A)^*\begin{pmatrix} c_0 & d_0(c_N,\ldots,c_1;c_0) \\ \vdots & \vdots \\ c_N & d_N(;c_N) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir der besseren Lesbarkeit halber $c_i(n_N, \ldots, n_{i+1}; n_i)$ mit c_i abgekürzt haben. Da $\neg A$ keine positiven Auftreten von $\mathsf{N}_j(t)$ hat, ist

$$(\neg A)^*\begin{pmatrix} c_0 & d_0(c_N,\ldots,c_1;c_0) \\ \vdots & \vdots \\ c_N & d_N(;c_N) \end{pmatrix}$$

dieselbe Formel wie

$$\begin{aligned} &(\neg A)^*\begin{pmatrix} c_0 & n_0 \\ \vdots & \vdots \\ c_N & n_N \end{pmatrix}, \\ \text{d.h. wie}\quad \neg&\left(A^*\begin{pmatrix} n_0 & c_0 \\ \vdots & \vdots \\ n_N & c_N \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Also können wir die Schnittregel von H verwenden und sind fertig, indem wir

$$b_i(x_N, \ldots, x_{i+1}; x_i) := d_i(c_N(;x_N), \ldots, c_{i+1}(x_N, \ldots, x_{i+2}; x_{i+1}); c_i(x_N, \ldots, x_{i+1}; x_i))$$

setzen. Die Bedingung $b_i(x_N, \ldots, x_{i+1}; x_i) \geq x_i$ ist erfüllt, da sie nach Induktionsvoraussetzung für c_i und d_i gilt, und b_i liegt in B^2. Um die Definition von b_i exakt ins Schema der stratifizierten Komposition einzupassen, genügt es, c_j für $j = i+1, \ldots, N$ durch $c'_j(x_N, \ldots, x_j;) := c_j(x_N, \ldots, x_{j+1}; x_j)$ zu ersetzen.

6. Den Fall einer Induktion mit Konklusion $\Gamma, \neg\mathsf{N}_j(t), A[t]$ zeigen wir vorerst für den Fall $N = 1$ und $j = 1$. Der allgemeine Fall verläuft nach dem selben Schema, auf die nötigen Ergänzungen werden wir am Ende des Beweises hinweisen.

   Aus der Induktionsvoraussetzung haben wir Funktionen c_0, c_1, d_0 und d_1 mit

$$\begin{aligned} &\mathsf{H} \vdash (\Gamma, A[\mathsf{0}])^*\begin{pmatrix} n_0 & c_0(n_1;n_0) \\ n_1 & c_1(;n_1) \end{pmatrix} \\ \text{und}\quad &\mathsf{H} \vdash (\Gamma, \neg A[x], A[\mathsf{s}x])^*\begin{pmatrix} n_0 & d_0(n_1;n_0) \\ n_1 & d_1(;n_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Wir wählen wie weiter oben ein b_1 aus B^2, das c_1 und d_1 majorisiert und setzen

$$\begin{aligned} b'_0(0, x_1; x_0) &:= c_0(x_1; x_0) \\ b'_0(v+1, x_1; x_0) &:= d_0(x_1; b'_0(v, x_1; x_0)). \end{aligned}$$

   Dann beweisen wir

$$\mathsf{H} \vdash (\Gamma, A[\overline{m}])^*\begin{pmatrix} n_0 & b'_0(m,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

   wie folgt durch Induktion nach m.

Die Induktionsverankerung $m = 0$ ist offensichtlich. Im Induktionsschritt erhalten wir mit dem Persistenzlemma aus $(*)$ und aus der Hauptinduktionsvoraussetzung ähnlich wie im Fall eines Schnitts

$$\mathsf{H} \vdash \Gamma^* \begin{pmatrix} n_0 & b_0'(m+1,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix}, A[\overline{m}]^* \begin{pmatrix} n_0 & b_0'(m,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$
$$\mathsf{H} \vdash (\Gamma, A[\overline{m+1}])^* \begin{pmatrix} n_0 & b_0'(m+1,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix}, (\neg A[\overline{m}])^* \begin{pmatrix} b_0'(m,n_1;n_0) & b_0'(m+1,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix}.$$

In der ersten Zeile ist $b_0'(m+1, n_1; n_0) \geq b_0'(m, n_1; n_0)$ aufgrund der Definition von b_0' und der Induktionsvoraussetzung für d_0 garantiert. Weil $\neg A$ weder positive Auftreten von N_0 noch irgendwelche Auftreten von N_1 hat, ist

$$(\neg A[\overline{m}])^* \begin{pmatrix} b_0'(m,n_1;n_0) & b_0'(m+1,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix}$$

dieselbe Formel wie

$$\neg \left(A[\overline{m}]^* \begin{pmatrix} n_0 & b_0'(m,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix} \right),$$

und wir erhalten mit einem Schnitt

$$\mathsf{H} \vdash (\Gamma, A[\overline{m+1}])^* \begin{pmatrix} n_0 & b_0'(m+1,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix},$$

womit $(*)$ bewiesen ist.

Wir haben deshalb

$$\mathsf{H} \vdash (\Gamma, A[\overline{m}])^* \begin{pmatrix} n_0 & b_0'(n_1,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix}$$

für alle $m < n_1$ und erhalten mit der Induktionsregel von H

$$\mathsf{H} \vdash (\Gamma, \neg \mathsf{N}_1(t), A[t])^* \begin{pmatrix} n_0 & b_0'(n_1,n_1;n_0) \\ n_1 & b_1(;n_1) \end{pmatrix}.$$

Damit sind wir fertig, indem wir $b_0(x_1; x_0) := b_0'(x_1, x_1; x_0)$ setzen, denn $b_0(x_1; x_0) \geq x_0$ gilt aufgrund der Definition von b_0'.

Im allgemeinen Fall definieren wir anstelle von b_0' nacheinander die Funktionen $b_{j-1}', \ldots, b_0'$ aus B^2, indem wir

$$\begin{array}{lcl}
b_{j-1}'(0, x_N, \ldots, x_j; x_{j-1}) & := & c_{j-1}(x_N, \ldots, x_j; x_{j-1}) \\
b_{j-1}'(v+1, x_N, \ldots, x_j; x_{j-1}) & := & d_{j-1}(x_N, \ldots, x_j; b_{j-1}'(v, x_N, \ldots, x_j; x_{j-1})), \\
\vdots & & \\
b_0'(0, x_N, \ldots, x_1; x_0) & := & c_0(x_N, \ldots, x_1; x_0) \\
b_0'(v+1, x_N, \ldots, x_1; x_0) & := & d_0(x_N, \ldots, x_j, \\
\multicolumn{3}{r}{b_{j-1}'(v, x_N, \ldots, x_j; x_{j-1}), \ldots, b_1'(v, x_N, \ldots, x_2; x_1); b_0'(v, x_N, \ldots, x_1; x_0))}
\end{array}$$

setzen, und wählen anstelle von b_1 für $j \leq k \leq N$ Funktionen b_k aus B^2, die c_k und d_k majorisieren. Aus $(*)$ wird dann

$$\mathsf{H} \vdash (\Gamma, A[\overline{m}])^* \begin{pmatrix} n_0 & b_0'(m,n_N,\ldots,n_1;n_0) \\ \vdots & \vdots \\ n_{j-1} & b_{j-1}'(m,n_N,\ldots,n_j;n_{j-1}) \\ n_j & b_j(n_N,\ldots,n_{j+1};n_j) \\ \vdots & \vdots \\ n_N & b_N(;n_N) \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten schliesslich

$$\mathsf{H} \vdash (\Gamma, \neg \mathsf{N}_j(t), A[t])^* \begin{pmatrix} n_0 & b'_0(n_j, n_N, \ldots, n_1; n_0) \\ \vdots & \vdots \\ n_{j-1} & b'_{j-1}(n_j, n_N, \ldots, n_j; n_{j-1}) \\ n_j & b_j(n_N, \ldots, n_{j+1}; n_j) \\ \vdots & \vdots \\ n_N & b_N(; n_N) \end{pmatrix}$$

und müssen somit (für $k < j$) $b_k(x_N, \ldots, x_{k+1}; x_k) := b'_k(x_j, x_N, \ldots, x_{k+1}; x_k)$ setzen. □

Korollar 30 *Jede beweisbar totale Funktion von $FT(\mathbb{N})$ wird durch ein Polynom beschränkt.*

Beweis. Ist f eine beweisbar totale Funktion von $FT(\mathbb{N})$, so auch von $\mathsf{G}_P^{\mathsf{r};N}$ (für ein geeignetes kohärentes Gleichungsprogramm P), also

$$\mathsf{G}_P^{\mathsf{r};N} \vdash_{*} \mathsf{N}_k(\vec{x}) \to \mathsf{N}_0(f(\vec{x}))$$

für eine natürliche Zahl $k \leq N$. Aus dem vorhergehenden Lemma erhalten wir eine Funktion b_k aus B^2 so, dass für alle natürlichen Zahlen n

$$\mathsf{H} \vdash \vec{x} < n \to f(\vec{x}) < b_k(n, 0, \ldots, 0; 0)$$

gilt. Weil P kohärent ist, ist diese Formel im Standardmodell gültig, und mit ihr ist es auch die Formel $f(\vec{x}) < b_k(max(\vec{x}) + 1, 0, \ldots, 0; 0)$. Die Behauptung folgt dann aus Theorem 6 und der Tatsache, dass die Funktionen von $\mathcal{E}^2$ durch Polynome beschränkt werden. □

Literatur

[1] Bellantoni, S., and Cook, S. A new recursion-theoretic characterization of the polytime functions. *Computational Complexity 2* (1992), 97–110.

[2] Leivant, D. A foundational delineation of computational feasability. In *Proceedings of the Sixth IEEE Conference on Logic in Computer Science (Amsterdam)*. IEEE Computer Society Press, Washington, 1991.

[3] Leivant, D. A new proof-theoretic approach to computational complexity. Submitted manuscript, 1994.

[4] Leivant, D. Ramified recurrence and computational complexity I: Word recurrence and poly-time. In *Feasible Mathemathics II*, P. Clote and J. Remmel, Eds. Birkhauser-Boston, New York, 1994.

[5] Leivant, D. Intrinsic theories and computational complexity. In *Logic and Computational Complexity*, D. Leivant, Ed., LNCS. Springer-Verlag, 1995.

[6] Parsons, C. Hierarchies of primitive recursive functions. *Zeit. Math. Logik 14* (1968), 357–376.

[7] Pohlers, W. *Proof Theory: An Introduction*, vol. 1407 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1988.

[8] Ritchie, R. W. Classes of predictably computable functions. *Trans. Am. Math. Soc. 106* (1963), 139–173.

[9] Rose, H. E. *Subrecursion: functions and hierarchies*, vol. 9 of *Oxford Logic Guides*. Clarendon Press, Oxford, 1984.

[10] Schwichtenberg, H. Rekursionszahlen und die Grzegorczyk-Hierarchie. *Arch. Math. Logik 12* (1969), 85–97.