PLTL
Vollständigkeit und Modell-Konstruktion

Diplomarbeit
der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bern

vorgelegt von

Daniel Sonderegger

2005

Leiter der Arbeit:

Prof. Dr. Gerhard Jäger,
Institut für Informatik und angewandte Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

«Heute war es den ganzen Tag sonnig, aber schon in der Nacht auf Morgen erreicht uns von Westen eine neue Regenfront und bringt uns in den nächsten Tagen graues und feuchtes Wetter...». Ich schalte den TV-Apparat aus, die Wetterprognosen interessieren mich eigentlich nicht, und trotzdem beschäftigen mich die eben gehörten Ausführungen. Interessant finde ich nämlich, dass offensichtlich Morgen nicht mehr gelten wird, was Heute noch galt. Die Aussage «die Sonne scheint» ist *wahr* wenn man den heutigen Tag betrachtet, jedoch Morgen wird die gleiche Aussage *falsch* sein, sofern der Wetterfrosch mit seiner Prognose recht behalten sollte. Wahrheiten ändern sich offensichtlich mit der Zeit!

Mit solcherlei Überlegungen über die Zeitabhängigkeit der Wahrheit befindet man sich in illustrer Gesellschaft. Schon Aristoteles (384 - 322 v.Chr.) hat über solche Themen reflektiert und er hielt fest, dass man Aussagen über die Zukunft keine Wahrheitswerte zuweisen kann. Als Konsequenz daraus reicht offensichtlich eine rein zwei-wertige Logik nicht aus um dies zu respektieren und er dachte an einen dritten Wahrheitswert «ungewiss» für Aussagen solcher Art. In der moderneren Zeit war es vor allem der Philosoph und Psychologe Arthur N. Prior (1914-1969), der eine Logik entwickelte, die für Aussagen verschiedene Wahrheitswerte zu verschiedenen Zeitpunkten erlaubte. Priors Ansatz lehnte sich stark an die Konzepte der Modallogik an, ein Gebiet, das ebenfalls noch am Anfang der Entwicklung stand. In beiden Bereichen lieferte Prior grundlegende Beiträge, speziell zu den «möglichen Welten»-Strukturen, die sich für die Interpretation von modalen Formeln eignen und die man heute dem Philosophen und Logiker Saul Kripke (Geb. 1940) zuschreibt. Prior erweiterte das Feld möglicher Interpretationen der Modalitäten und propagierte, dass auch Zeit abhängige Aussagen, wie «es wird der Fall sein, dass...», durch Modal-Operatoren ausgedrückt werden können. Prior etablierte die Sichtweise, dass Modal-Operatoren nichts anderes sind als Quantoren, die über die «möglichen Welten» laufen, welche ihrerseits durch eine (binäre) Relation zu bestimmen sind.

Verwendet man als Relation irgendwelche Ordnungen, so bekommt man sinnvolle Strukturen für eine zeitliche Interpretation der Modal-Operatoren. Die geordnete Menge von Welten widerspiegelt dann den (geordneten) Ablauf von Zeitpunkten. Je nach Art der Menge und Ordnung können verschiedene Eigenschaften der Zeit modelliert werden. Betrachtet man z.B. $(\mathbb{Q}, \leq)$ als Zeitmodell, so ist der Zeitablauf dicht, jedoch nicht stetig (lückenlos). Will man ein stetiges Modell, sollte man $(\mathbb{R}, \leq)$ nehmen. $(\mathbb{Z}, \leq)$ und $(\mathbb{N}, \leq)$ sind diskrete Zeitmodelle, in welchen jeder Zeitpunkt einen nächsten Zeitpunkt besitzt. Sie unterscheiden sich durch die unbeschränkte Vergangenheit in $\mathbb{Z}$, während $\mathbb{N}$ einen Anfangszeitpunkt besitzt.

Modale Formeln wie etwa $\Diamond p$ können dann als «es wird der Fall sein, dass p» interpretiert werden. $\Box p$ würde dann für «es wird immer p sein» stehen. Für diskrete Zeitmodelle kann es sinnvoll sein, einen weiteren Modal-Operator (z.B. $\bigcirc$) zu verwenden, um den nächsten Zeitpunkt anzusprechen. $\bigcirc p$ entspricht dann der Aussage «das nächste Mal p»

Der Logiker und Philosoph J.A.W. Kamp (Geb. 1940) führte 1968 in seiner Doktorarbeit ein weiteres Zeichen ($\mathcal{U}$) ein. Steht p für die Aussage «der Krug geht zum Brunnen» und q für «der Krug bricht», so beschreibt die Formel $p \mathcal{U} q$ das bekannte Sprichwort «der Krug geht zum Brunnen bis er bricht». $\mathcal{U}$ steht also für «bis» oder «solange». Eine (Zeit-) logische Sprache wird durch Hinzunahme von $\mathcal{U}$ echt ausdrucksstärker, verliert aber die Eigenschaft eine reine Modallogik zu sein.

Aus Sicht der Informatik sind vor Allem diskrete Zeitstrukturen interessant, da sie der Zeitstruktur im Rechner entsprechen. So geht es auch in dieser Arbeit um das Zeitmodell $(\mathbb{N}, \leq)$. Wir betrachten ein Beweissystem und beweisen dessen Vollständigkeit bezüglich $(\mathbb{N}, \leq)$ auf zwei verschiedene Arten. Dabei sehen wir zwei Arten der Modell-Konstruktion (Tableau und kanonisches Modell) und wir wollen diese miteinander vergleichen und diskutieren. Zudem geben wir einen Algorithmus an, der für eine gegebene Formel φ entscheiden kann, ob sie bezüglich $(\mathbb{N}, \leq)$ gültig ist oder nicht.

Bevor wir anfangen, möchte ich es nicht unterlassen einigen Personen zu danken, die für das Gelingen dieser Arbeit mitverantwortlich sind. An erster Stelle Prof. G. Jäger für den Vorschlag des Themengebietes und für die freundliche und geduldige Betreuung. Allen Kollegen der TIL-Gruppe, Didi für viele spannende Gespräche und Diskussionen in unserem Büro zur Überbrückung unkreativer Phasen; This, Geoff und Kai für eure Mithilfe und für das Lösen zahlreicher Knoten in meinem Kopf. Meinen Freunden für den freizeitlichen Ausgleich zum kopflastigen Alltag. Meinen Eltern für ihre Liebe und grosszügige Unterstützung, die mir erst das Studium ermöglichte. Vielen herzlichen Dank!

2 Sprache und Semantik von PLTL

2.1 Sprache

Als Erstes brauchen wir eine Sprache, also einen Zeichensatz mit deren Hilfe sich Formeln bilden lassen.

Definition 2.1 *Ausgehend von einer abzählbaren (Aussagen-) Menge* Φ*, umfasst die* Sprache *von PLTL die folgenden Zeichen:*

- $p_0, p_1, \ldots, p, q, \ldots$ *(abzählbar viele Aussagenvariabeln)*
- $\perp$ *(false)*
- $\neg, \vee$ *(not, or)*
- $\mathcal{U}, \bigcirc$ *(until, next)*

Folgende Regeln beschreiben, wie Formeln erzeugt werden können.

2.2 Formeln

Definition 2.2 *Die Menge der* Formeln *von PLTL definieren wir induktiv:*

- $\perp$ *und alle Aussagenvariabeln sind Formeln*
- *ist* α *eine Formel, dann sind* $\neg\alpha$ *und* $\bigcirc\alpha$ *Formeln*
- *sind* α *und* β *Formeln, dann sind* $\alpha \vee \beta$ *und* $\alpha \,\mathcal{U}\, \beta$ *Formeln*

Definition 2.3 *Für eine gegebene Formel* φ *definieren wir die Menge der Subformeln* $sub(\varphi)$ *induktiv, als die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:*

- $\varphi \in sub(\varphi)$
- $\neg\alpha \in sub(\varphi)$ *oder* $\bigcirc\alpha \in sub(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in sub(\varphi)$
- $\alpha \vee \beta \in sub(\varphi)$ *oder* $\alpha \,\mathcal{U}\, \beta \in sub(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in sub(\varphi)$ *und* $\beta \in sub(\varphi)$

Bevor wir uns die Modelle betrachten, in denen Formeln interpretiert werden (also wahr oder falsch sein) können, wollen wir uns noch ein wenig bequemer einrichten und noch weitere Symbole einführen, die jedoch nur als syntaktische Abkürzungen zu betrachten sind. Sie machen Formeln lesbarer, lassen sich jedoch immer auf die vorher definierten Zeichen zurück führen.

Notation 2.4 *Abkürzende Zeichen:*

- $\top :\equiv \neg\perp$ *(true)*

- $\alpha \wedge \beta :\equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ *(and)*
- $\alpha \rightarrow \beta :\equiv \neg\alpha \vee \beta$ *(implies)*
- $\alpha \leftrightarrow \beta :\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ *(if and only if)*
- $\Diamond\alpha :\equiv \top\,\mathcal{U}\,\alpha$ *(sometimes)*
- $\Box\alpha :\equiv \neg\Diamond\neg\alpha$ *(always)*

Die ersten vier Punkte definieren die üblichen in der Aussagenlogik benutzten syntaktischen Abkürzungen. $\Diamond$ und $\Box$ sind Modal-Operatoren, wie sie in normalen Modallogiken verwendet werden. Die Sprache kommt ohne sie aus, da sie auf $\mathcal{U}$-Formeln reduziert werden können. Verwendet man eine weniger ausdrucksstarke Sprache ohne $\mathcal{U}$, dann kann $\Diamond$ als Grundzeichen zur Sprache hinzugenommen werden. Es handelt sich dann um eine normale (Multi-) Modallogik mit den beiden Modal-Operatoren $\Diamond$ und $\bigcirc$. $\mathcal{U}$ hingegen kann nicht als Modal-Operator angesehen werden und die Logik die wir hier betrachten ist daher keine reine Modallogik mehr.

Im Folgenden werden wir zu Definitionen, die $\mathcal{U}$-Formeln betreffen, die entsprechende Bedeutung für $\Diamond$ in Bemerkungen erläutern. Diese Bemerkungen sollten als Definitionen verwendet werden, wenn man eine Sprache ohne $\mathcal{U}$ (aber mit $\Diamond$) verwenden will.

Wir wollen, falls unnötig, Klammern weglassen und dabei nach folgender Hierarchie verfahren:

Notation 2.5 *Bindungsstärke der logischen Zeichen:*

6: $\neg$, $\bigcirc$

5: $\Box$, $\Diamond$

4: $\mathcal{U}$

3: $\wedge$

2: $\vee$

1: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Die Formel $\neg p\,\mathcal{U}\,q \vee \neg q \rightarrow \neg\Box q$ sollte also als $(((\neg p)\,\mathcal{U}\,q) \vee (\neg q)) \rightarrow (\neg(\Box p))$ gelesen werden. Zusätzlich wollen wir vereinbaren, dass rechts-assoziativ geklammert wird, das heisst Formeln wie $p \rightarrow q \rightarrow r$ sollten als $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ gelesen werden.

2.3 Modelle

Nun brauchen wir Modelle, die PLTL-Formeln interpretieren können und betrachten dazu eine nicht-leere Menge S von Welten und eine Interpretation $\pi : \Phi \to \wp(S)$, die jede Aussage in die Menge derjenigen Welten abbildet, in der sie wahr sein soll. Eine *Folge* σ_S *über* S ist eine unendliche Sequenz von Welten aus S:

$$\sigma_S = s_0, s_1, \ldots \quad (s_i \in S \ \ \forall i \in \mathbb{N})$$

Auf diese Weise haben wir eine zu $\mathbb{N}$ isomorphe Zeitstruktur. PLTL-Modelle werden jetzt folgendermassen definiert:

Definition 2.6 *Ein Modell $\mathcal{M}$ für PLTL ist ein Tupel $\mathcal{M} = (\sigma_S, \pi)$. Formeln werden in einzelnen Welten s_i innerhalb der zu $\mathcal{M}$ gehörenden Folge interpretiert. Dabei bedeutet $\mathcal{M}, i \models \alpha$, dass die Formel α im Modell $\mathcal{M}$* zum Zeitpunkt *i* gültig *(oder* wahr) *ist, und wir sagen dann auch $\mathcal{M}$* erfüllt *α* zum Zeitpunkt *i. Für beliebige Aussagen p, Formeln α und β und $i \in \mathbb{N}$ wird $\models$ durch folgende Regeln definiert:*

- $\mathcal{M}, i \not\models \bot$
- $\mathcal{M}, i \models p \quad :\Longleftrightarrow \quad s_i \in \pi(p)$
- $\mathcal{M}, i \models \neg\alpha \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}, i \not\models \alpha$
- $\mathcal{M}, i \models \alpha \vee \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}, i \models \alpha$ *oder* $\mathcal{M}, i \models \beta$
- $\mathcal{M}, i \models \bigcirc\alpha \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}, i{+}1 \models \alpha$
- $\mathcal{M}, i \models \alpha \mathcal{U} \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists k \geq i$, *sodass* $\mathcal{M}, k \models \beta$ *und* $\forall j, i \leq j < k,\ \mathcal{M}, j \models \alpha$

α ist gültig in $\mathcal{M}$, *falls es zu jedem Zeitpunkt i in $\mathcal{M}$ gültig ist:*

$$\mathcal{M} \models \alpha \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \mathcal{M}, i \models \alpha$$

α ist gültig, *falls es gültig in allen PLTL-Modellen ist.*

Es handelt sich bei dieser Definition um die *gleitende* Version der Gültigkeit einer Formel in einem Modell. Im Gegensatz zur *verankerten* Version, bei welcher eine Formel gültig ist, falls sie es zum Zeitpunkt 0 ist. Der gleitende Ansatz kommt einer modalen Sicht näher, ist es doch die übliche Art Gültigkeit in einer Modallogik zu definieren. Die verankerte Version dagegen wird häufig benutzt, wenn es um die Untersuchung von Eigenschaften von nebenläufigen Programmen geht. Eine detaillierte Diskussion über diese beiden Arten von Definitionen folgt später in Kapitel 5.

Eine Formel α heisst *erfüllbar*, falls es ein Modell $\mathcal{M}$ und ein $i \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\mathcal{M}, i \models \alpha$ gilt. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\alpha \text{ ist gültig} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\alpha \text{ ist nicht erfüllbar}$$

Bemerkung 2.7 *Für $\top, \wedge, \Diamond$ und $\Box$ verhält sich $\models$ wie erwartet:*

- $\mathcal{M}, i \models \top$
- $\mathcal{M}, i \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{M}, i \models \alpha$ *und* $\mathcal{M}, i \models \beta$
- $\mathcal{M}, i \models \Diamond\alpha \iff \exists k \geq i,$ *sodass* $\mathcal{M}, k \models \alpha$
- $\mathcal{M}, i \models \Box\alpha \iff \forall k \geq i, \ \mathcal{M}, k \models \alpha$

3 Tableau und Entscheidbarkeit

Kann man herausfinden, ob eine gegebene Formel erfüllbar ist oder nicht? Man könnte versuchen für jede Formel φ ein Modell zu konstruieren, gelingt es, so ist φ erfüllbar.

Das Tableau ist eine solche Modell-Konstruktion. Damit lässt sich aus der syntaktischen Struktur von φ ein Modell konstruieren, wann immer φ erfüllbar ist. Mit diesem Verfahren lässt sich gleichzeitig auch Gültigkeit testen, denn wenn $\neg\varphi$ nicht erfüllbar ist, so ist φ gültig.

Die Tableau-Konstruktion ist Thema dieses Kapitels und wir werden einen Algorithmus angeben, der für beliebige Formeln Gültigkeit testen kann. Dies beweist dann gleichzeitig, dass die Menge der gültigen Formeln entscheidbar ist.

3.1 Atome

Definition 3.1 *Der* Abschluss *von φ, $cl(\varphi)$, besteht aus der Menge der Subformeln, sowie deren Negationen, wobei wir letztlich keine doppelt negierten Formeln zulassen wollen.*

Der Abschluss für $\varphi \equiv \bigcirc(p \vee q) \vee \neg p$ beispielsweise, ist folgende Menge:

$$\{\bigcirc(p \vee q) \vee \neg p, \neg(\bigcirc(p \vee q) \vee \neg p), \bigcirc(p \vee q), \neg \bigcirc (p \vee q), p \vee q, \neg(p \vee q), p, \neg p, q, \neg q\}$$

Der Abschluss einer Formel hat höchstens doppelt soviele Elemente wie die Menge der Subformeln:

$$|cl(\varphi)| \leq 2 \cdot |sub(\varphi)|$$

Auf dieser Menge bilden wir nun sogenannte Atome. Ein Atom ist (intuitiv) eine maximal konsistente Teilmenge von $cl(\varphi)$. Der Begriff ≪konsistent≫ wird üblicherweise syntaktisch, abhängend von einem Beweisbarkeitsbegriff ($\vdash$) definiert (vgl. Def. 6.1), Atome hingegen werden per Definition in die gewünschte (maximal konsistente) Form gebracht und bekommen auf diese Weise dieselbe Bedeutung. Die Menge aller Atome bildet die Basis für die Konstruktion des Tableaus.

Definition 3.2 *Ein Atom A von φ ist eine Teilmenge von $cl(\varphi)$, die folgende Bedingungen erfüllt:*

- $\perp \notin A$
- $\forall \alpha \in cl(\varphi) \quad \alpha \in A \iff \neg\alpha \notin A$
- $\forall (\alpha \vee \beta) \in cl(\varphi) \quad \alpha \vee \beta \in A \iff \alpha \in A$ *oder* $\beta \in A$
- $\forall (\alpha \mathcal{U} \beta) \in cl(\varphi) \quad \alpha \mathcal{U} \beta \in A \implies \alpha \in A$ *oder* $\beta \in A$
- $\forall (\alpha \mathcal{U} \beta) \in cl(\varphi) \quad \beta \in A \implies \alpha \mathcal{U} \beta \in A$
- $\forall \bigcirc \alpha \in cl(\varphi) \quad \bigcirc \alpha \in A \iff \bigcirc \neg\alpha \notin A$

$\mathcal{A}_\varphi$ bezeichne die Menge aller Atome von φ.

Die ersten drei Punkte definieren maximal konsistente Teilmengen bezüglich (substituierten) aussagenlogischen Formeln. Die letzten drei Punkte zeigen Regeln bezüglich echten PLTL-Formeln zur Bildung von maximal konsistenten Teilmengen.

Nun lassen sich unmittelbar Regeln bezüglich Formeln der Form $\alpha \wedge \beta$, $\Box\alpha$ und $\Diamond\alpha$ ableiten. Solche Formeln lassen sich ja auf jene reduzieren, welche höchstens aus $\neg$, $\vee$ und $\mathcal{U}$ bestehen, daher ergibt sich unmittelbar durch Umformen und Zurückführen auf obige Definition folgende Bemerkung:

Bemerkung 3.3 *Ist A ein Atom von φ, so gelten folgende Punkte:*

- $\forall(\alpha \wedge \beta) \in cl(\varphi) \quad \alpha \wedge \beta \in A \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in A$ *und* $\beta \in A$
- $\forall\Diamond\alpha \in cl(\varphi) \quad \alpha \in A \quad \Longrightarrow \quad \Diamond\alpha \in A$
- $\forall\Box\alpha \in cl(\varphi) \quad \Box\alpha \in A \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in A$

Die Menge der Atome für eine gegebene Formel φ lässt sich systematisch konstruieren, was wir am folgenden Beispiel exemplarisch zeigen wollen:

Beispiel 3.4 *Sei $\varphi \equiv \Box p \vee p$, dann ist*

$$cl(\varphi) = \left\{ \begin{array}{lll} \Box p \vee p, & \Box p, & p, \\ \Diamond\neg p \wedge \neg p, & \Diamond\neg p, & \neg p \end{array} \right\}$$

bestehend aus den drei Subformeln von φ (obere Zeile) und deren Negationen (untere Zeile). Schreiben wir nun alle möglichen Mengen auf, mit der Eigenschaft keine Formel gleichzeitig positiv und negiert zu enthalten, so erhalten wir acht Mengen, welche bereits die ersten beiden Bedingungen für Atome erfüllen.

$$\begin{array}{l} B_1 = \{\Box p \vee p, \Box p, p\} \\ B_2 = \{\Box p \vee p, \Box p, \neg p\} \ (*^5) \\ B_3 = \{\Box p \vee p, \Diamond\neg p, p\} \\ B_4 = \{\Box p \vee p, \Diamond\neg p, \neg p\} \ (*^3) \\ B_5 = \{\Diamond\neg p \wedge \neg p, \Box p, p\} \ (*^3) \\ B_6 = \{\Diamond\neg p \wedge \neg p, \Box p, \neg p\} \ (*^3) \\ B_7 = \{\Diamond\neg p \wedge \neg p, \Diamond\neg p, p\} \ (*^3) \\ B_8 = \{\Diamond\neg p \wedge \neg p, \Diamond\neg p, \neg p\} \end{array}$$

Nun gehen wir der Reihe nach die restlichen Bedingungen durch und streichen systematisch diejenigen Mengen, die eine dieser Bedingungen verletzen: So stellt sich heraus, dass B_4, B_5, B_6 und B_7 die (Disjunktions-) Bedingung 3 verletzen ($*^3$), sowie dass B_2 die Bedingung 5 verletzt ($*^5$, vgl. Bem. 3.3). Die Menge der Atome besteht dann aus den übrig gebliebenen Mengen:

$$\mathcal{A}_\varphi = \{B_1, B_3, B_8\}$$

3.2 Tableau-Konstruktion

Die Menge aller Atome von φ, $\mathcal{A}_\varphi$, bildet die Basismenge für unsere Struktur. Als nächstes definieren wir eine zweistellige Relation auf dieser Menge und erhalten so einen Graph.

Definition 3.5

$$(A,B) \in \mathcal{R}_\varphi \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall \bigcirc \alpha \in cl(\varphi) \quad \bigcirc \alpha \in A \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in B \quad \textit{und} \\ \forall (\alpha \,\mathcal{U}\, \beta) \in cl(\varphi) \quad \alpha \,\mathcal{U}\, \beta, \neg\beta \in A \quad \Longrightarrow \quad \alpha \,\mathcal{U}\, \beta \in B \quad \textit{und} \\ \forall (\alpha \,\mathcal{U}\, \beta) \in cl(\varphi) \quad \alpha \,\mathcal{U}\, \beta \in B \;\; \textit{und} \;\; \alpha \in A \quad \Longrightarrow \quad \alpha \,\mathcal{U}\, \beta \in A \end{cases}$$

Wie üblich wollen wir untersuchen, was obige Definition für $\Box$- und $\Diamond$-Formeln bedeutet:

Bemerkung 3.6

$$(A,B) \in \mathcal{R}_\varphi \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \forall \Box\alpha \in cl(\varphi) \quad \Box\alpha \in B, \alpha \in A \quad \Longrightarrow \quad \Box\alpha \in A \quad \textit{und} \\ \forall \Box\alpha \in cl(\varphi) \quad \Box\alpha \in A \quad \Longrightarrow \quad \Box\alpha \in B \end{cases}$$

$$(A,B) \in \mathcal{R}_\varphi \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \forall \Diamond\alpha \in cl(\varphi) \quad \Diamond\alpha, \neg\alpha \in A \quad \Longrightarrow \quad \Diamond\alpha \in B \quad \textit{und} \\ \forall \Diamond\alpha \in cl(\varphi) \quad \Diamond\alpha \in B \quad \Longrightarrow \quad \Diamond\alpha \in A \end{cases}$$

Für zwei beliebige Atome $A, B \in \mathcal{A}_\varphi$ sagen wir B ist *Nachfolger* von A, falls $(A,B) \in \mathcal{R}_\varphi$ gilt. Unter einem $\mathcal{R}_\varphi$-Pfad von A nach B verstehen wir eine endliche Folge von Atomen $A = A_0, \ldots, A_n = B$, sodass für jedes $i < n$ A_{i+1} Nachfolger von A_i ist. Wir sagen dann B ist *erreichbar* von A. Die nachfolgenden zwei Lemmata beschreiben wichtige Eigenschaften über Nachfolger- bzw. erreichbare Atome.

Lemma 3.7 *Für beliebige Atome A und B von φ mit $(A,B) \in \mathcal{R}_\varphi$ gilt:*

$$\forall \bigcirc \alpha \in cl(\varphi) \quad \neg \bigcirc \alpha \in A \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\alpha \in B$$

Beweis

$$\neg \bigcirc \alpha \in A \overset{\textit{Def Atom}}{\Longleftrightarrow} \bigcirc\alpha \notin A \overset{\textit{Def } \mathcal{R}_\varphi}{\Longleftrightarrow} \alpha \notin B \overset{\textit{Def Atom}}{\Longleftrightarrow} \neg\alpha \in B$$

$\ddot\smile$

Lemma 3.8 *Für einen endlichen $\mathcal{R}_\varphi$-Pfad $A_1, \ldots, A_n$, von Atomen von φ gilt:*

i: $\alpha \,\mathcal{U}\, \beta \in A_1$ *und* $\forall i < n \;\; \beta \notin A_i \quad \Longrightarrow \quad \forall i \leq n \;\; \alpha \,\mathcal{U}\, \beta \in A_i$ *und* $\forall i < n \;\; \alpha \in A_i$

ii: $\beta \in A_n$ *und* $\forall i < n \;\; \alpha \in A_i \quad \Longrightarrow \quad \alpha \,\mathcal{U}\, \beta \in A_1$

Beweis

i: Wir beweisen zuerst $\alpha \mathcal{U} \beta \in A_i \;\; \forall i \leq n$, mit Induktion nach n:
$n = 1$: trivial, da $(\alpha \mathcal{U} \beta) \in A_1$ nach Voraussetzung.
$n \to n+1$: $\alpha \mathcal{U} \beta \in A_n$ und $\beta \notin A_n$ nach Voraussetzung
$\overset{\text{Def Atom}}{\Longrightarrow} \;\; \alpha \mathcal{U} \beta, \neg\beta \in A_n \;\; \overset{\text{Def } \mathcal{R}_\varphi}{\Longrightarrow} \;\; \alpha \mathcal{U} \beta \in A_{n+1}$.
Nun zeigen wir noch $\alpha \in A_i \;\; \forall i < n$, ebenfalls mit Induktion nach n:
$n = 1$: trivial.
$n \to n+1$: nach Voraussetzung $\alpha \mathcal{U} \beta \in A_n$ und $\beta \notin A_n$. Ist $\alpha \notin A_n$, so kann A_n kein Atom sein (vgl. Def. 3.2, Punkt 4), was der Voraussetzung widerspricht.

ii: Nach Def. 3.2, Punkt 5, folgt aus $\beta \in A_n$, dass $\alpha \mathcal{U} \beta \in A_n$. Daher reicht zu zeigen:

$$\alpha \mathcal{U} \beta \in A_n \text{ und } \forall i < n \;\; \alpha \in A_i \quad \Longrightarrow \quad \alpha \mathcal{U} \beta \in A_1$$

Dies beweisen wir mit Induktion nach n:
$n = 1$: trivial.
$n \to n+1$: $\alpha \mathcal{U} \beta \in A_{n+1}$ und $\alpha \in A_n \quad \overset{\text{Def } \mathcal{R}_\varphi}{\Longrightarrow} \quad \alpha \mathcal{U} \beta \in A_n \quad \overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \quad \alpha \mathcal{U} \beta \in A_1$

$\ddot{\smile}$

$(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ bezeichne den eben definierten Graph. Wir betrachten nun unendliche Pfade durch diesen Graph und wollen untersuchen, ob mit geeigneter Interpretation ein Modell für φ dabei ist. Als Interpretation drängt sich die *natürliche* Interpretation $\pi_\varphi : \Phi \to \wp(\mathcal{A}_\varphi)$ auf, die jeder Aussage $p \in \Phi$ diejenigen Atome zuweist, in denen p enthalten ist;

$$\pi_\varphi(p) := \{A \; ; \;\; p \in A\}$$

Betrachten wir nun einen Pfad $\sigma_{\mathcal{A}_\varphi} = A_0, A_1, \ldots$ und nehmen wir an, dass $\alpha \mathcal{U} \beta \in A_0$ gilt: Die Definition von $\mathcal{R}_\varphi$ lässt es zu, dass β in keinem der Folgegliedern enthalten ist (d.h. $\forall i \in \mathbb{N} \quad \beta \notin A_i$). In diesem Fall hätten wir kein Modell für $\alpha \mathcal{U} \beta$. Um dieses Problem zu umgehen, brauchen wir folgende Definition, indem wir «unproblematische» Pfade als *erfüllend* bezeichnen.

Definition 3.9 *Ein unendlicher Pfad $\sigma_{\mathcal{A}_\varphi} = A_0, A_1, \ldots$ durch den Graph $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ heisst* erfüllend für *φ, falls*

$$\varphi \in A_0 \quad \text{und} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \, \forall (\alpha \mathcal{U} \beta) \quad (\alpha \mathcal{U} \beta \in A_i \quad \Longrightarrow \quad \exists k \geq i \quad \beta \in A_k)$$

Fällt die erste Bedingung und somit der Bezug zu φ weg, so sagen wir einfach der Pfad ist erfüllend*.*

Das folgende Korollar zeigt, dass jedes Modell, in welchem eine Formel φ zu einem Zeitpunkt i gültig ist, einen erfüllenden Pfad durch $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ erzeugt.

Korollar 3.10 *Sei $\mathcal{M} = (\sigma, \pi)$ ein Modell und es gelte $\mathcal{M}, n \models \varphi$ für eine Formel φ und ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Folge $B_0, B_1, \ldots$, die gegeben ist durch*

$$B_i := \{\beta \in cl(\varphi)\ ; \quad \mathcal{M}, n + i \models \beta\}$$

ein erfüllender Pfad für φ

Beweis

Alle B_i's sind Atome:
Die ersten drei Punkte der Definition von Atomen (Def. 3.2) sind unmittelbar wegen Def. 2.6 erfüllt.

$$
\begin{array}{l}
\textit{Sei } \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B_i \overset{\textit{Def } B_i}{\Longrightarrow} \mathcal{M}, n+i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \\
\overset{\textit{Def} \models}{\Longrightarrow} \exists k \geq i,\ \textit{sodass } \mathcal{M}, n+k \models \beta \textit{ und } \forall j,\ i \leq j < k,\ \mathcal{M}, n+j \models \alpha \\
\Longrightarrow \mathcal{M}, n+i \models \alpha \textit{ oder } \mathcal{M}, n+i \models \beta \overset{\textit{Def } B_i}{\Longrightarrow} \alpha \in B_i \textit{ oder } \beta \in B_i \\
\textit{Sei } \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in cl(\varphi) \textit{ und } \beta \in B_i \overset{\textit{Def } B_i}{\Longrightarrow} \mathcal{M}, n+i \models \beta \\
\overset{\textit{Def} \models}{\Longrightarrow} \mathcal{M}, n+i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \overset{\textit{Def } B_i}{\Longrightarrow} \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B_i \\
\bigcirc\alpha \in B_i \overset{\textit{Def } B_i}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}, n+i \models \bigcirc\alpha \overset{\textit{Def} \models}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}, n+i+1 \models \alpha \\
\overset{\textit{Def} \models}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}, n+i+1 \not\models \neg\alpha \overset{\textit{Def} \models}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}, n+i \not\models \bigcirc\neg\alpha \overset{\textit{Def } B_i}{\Longleftrightarrow} \bigcirc\neg\alpha \notin B_i
\end{array}
$$

Es handelt sich um einen $\mathcal{R}_\varphi$-Pfad (z.z. $\forall i \in \mathbb{N} \quad (B_i, B_{i+1}) \in \mathcal{R}_\varphi$):
Sei $\bigcirc\alpha \in cl(\varphi)$:

$$\bigcirc\alpha \in B_i \overset{\textit{Def } B_i}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}, n+i \models \bigcirc\alpha \overset{\textit{Def} \models}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}, n+i+1 \models \alpha \overset{\textit{Def } B_{i+1}}{\Longleftrightarrow} \alpha \in B_{i+1}$$

Sei $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in cl(\varphi)$:

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{\alpha\,\mathcal{U}\,\beta, \neg\beta \in B_i} \\
\Longrightarrow & \mathcal{M}, n+i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \textit{ und } \mathcal{M}, n+i \models \neg\beta & \scriptstyle \textit{Def. } B_i \\
\Longrightarrow & \mathcal{M}, n+i \not\models \beta \textit{ und } \exists k \geq i,\ \textit{sodass } \mathcal{M}, n+k \models \beta \textit{ und} & \\
 & \forall j,\ i \leq j < k,\ \mathcal{M}, n+j \models \alpha & \scriptstyle \textit{Def.} \models \\
\Longrightarrow & \exists k \geq i+1,\ \textit{sodass } \mathcal{M}, n+k \models \beta \textit{ und } \forall j,\ i+1 \leq j < k,\ \mathcal{M}, n+j \models \alpha & \\
\Longrightarrow & \mathcal{M}, n+i+1 \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta & \scriptstyle \textit{Def.} \models \\
\Longrightarrow & \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B_{i+1} & \scriptstyle \textit{Def. } B_{i+1} \\
\multicolumn{3}{l}{\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B_{i+1} \textit{ und } \alpha \in B_i} \\
\Longrightarrow & \mathcal{M}, n+i+1 \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \textit{ und } \mathcal{M}, n+i \models \alpha & \scriptstyle \textit{Def. } B_i \\
\Longrightarrow & \mathcal{M}, n+i \models \alpha \textit{ und } \exists k \geq i+1,\ \textit{sodass } \mathcal{M}, n+k \models \beta \textit{ und} & \\
 & \forall j,\ i+1 \leq j < k,\ \mathcal{M}, n+j \models \alpha & \scriptstyle \textit{Def.} \models \\
\Longrightarrow & \exists k \geq i,\ \textit{sodass } \mathcal{M}, n+k \models \beta \textit{ und } \forall j,\ i \leq j < k,\ \mathcal{M}, n+j \models \alpha & \\
\Longrightarrow & \mathcal{M}, n+i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta & \scriptstyle \textit{Def.} \models \\
\Longrightarrow & \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B_i & \scriptstyle \textit{Def. } B_i
\end{array}
$$

Bleibt noch zu zeigen, dass der Pfad erfüllend für φ ist:
$\varphi \in B_0$, da nach Voraussetzung $\mathcal{M}, n \models \varphi$

$$
\begin{array}{l}
\textit{Sei } \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B_i \overset{\textit{Def } B_i}{\Longrightarrow} \mathcal{M}, n+i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \\
\overset{\textit{Def} \models}{\Longrightarrow} \exists k \geq i,\ \textit{sodass } \mathcal{M}, n+k \models \beta \overset{\textit{Def } B_i}{\Longrightarrow} \exists k \geq i,\ \textit{sodass } \beta \in A_k
\end{array}
$$

$\ddot{\smile}$

Ist eine Formel φ erfüllbar, so existiert also ein erfüllender Pfad in $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$. Bleibt eine Frage: beschreibt jeder erfüllende Pfad ein Modell? Das folgende Theorem liefert die Antwort.

Theorem 3.11 *Sei $\sigma_{\mathcal{A}_\varphi} = A_0, A_1, \ldots$ ein erfüllender Pfad in $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ und $\mathcal{M} = (\sigma_{\mathcal{A}_\varphi}, \pi_\varphi)$:*

$$\forall \psi \in cl(\varphi), \forall i \in \mathbb{N} \quad \mathcal{M}, i \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \in A_i$$

Beweis

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach Formelaufbau:
$\psi \equiv p \in \Phi$:

$$\mathcal{M}, i \models p \quad \overset{Def \models}{\Longleftrightarrow} \quad A_i \in \pi_\varphi(p) \quad \overset{Def\ \pi_\varphi}{\Longleftrightarrow} \quad p \in A_i$$

$\psi \equiv \neg\alpha$:

$$\mathcal{M}, i \models \neg\alpha \quad \overset{Def \models}{\Longleftrightarrow} \quad \mathcal{M}, i \not\models \alpha \quad \overset{IV}{\Longleftrightarrow} \quad \alpha \notin A_i \quad \overset{Def\ Atom}{\Longleftrightarrow} \quad \neg\alpha \in A_i$$

$\psi \equiv \alpha \vee \beta$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}, i \models \alpha \vee \beta \quad \overset{Def \models}{\Longleftrightarrow} \quad \mathcal{M}, i \models \alpha \text{ oder } \mathcal{M}, i \models \beta \\ &\quad \overset{IV}{\Longleftrightarrow} \quad \alpha \in A_i \text{ oder } \beta \in A_i \quad \overset{Def\ Atom}{\Longleftrightarrow} \quad \alpha \vee \beta \in A_i \end{aligned}$$

$\psi \equiv \bigcirc\alpha$:

$$\mathcal{M}, i \models \bigcirc\alpha \quad \overset{Def \models}{\Longleftrightarrow} \quad \mathcal{M}, i+1 \models \alpha \quad \overset{IV}{\Longleftrightarrow} \quad \alpha \in A_{i+1} \quad \overset{Def\ \mathcal{R}_\varphi}{\Longleftrightarrow} \quad \bigcirc\alpha \in A_i$$

$\psi \equiv \alpha \mathcal{U} \beta$:

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{\ll\Rightarrow\gg\text{: } \mathcal{M}, i \models \alpha \mathcal{U} \beta} & \\
\Longrightarrow & \exists k \geq i, \text{ sodass } \mathcal{M}, k \models \beta \text{ und } \forall j, i \leq j < k,\ \mathcal{M}, j \models \alpha & \text{Def. } \models \\
\Longrightarrow & \exists k \geq i, \text{ sodass } \beta \in A_k \text{ und } \forall j, i \leq j < k,\ \alpha \in A_j & IV \\
\Longrightarrow & \alpha \mathcal{U} \beta \in A_i & L.\ 3.8.ii \\
\multicolumn{2}{l}{\ll\Leftarrow\gg\text{: } \alpha \mathcal{U} \beta \in A_i} & \\
\Longrightarrow & \exists k \geq i, \text{ sodass } \beta \in A_k \text{ und } \forall j, i \leq j < k,\ \beta \notin A_j & \sigma_{\mathcal{A}_\varphi} \text{ erf. Pfad} \\
\Longrightarrow & \exists k \geq i, \text{ sodass } \beta \in A_k \text{ und } \forall j, i \leq j < k,\ \alpha \in A_j & L.\ 3.8.i \\
\Longrightarrow & \exists k \geq i, \text{ sodass } \mathcal{M}, k \models \beta \text{ und } \forall j, i \leq j < k,\ \mathcal{M}, j \models \alpha & IV \\
\Longrightarrow & \mathcal{M}, i \models \alpha \mathcal{U} \beta & \text{Def. } \models
\end{array}$$

Daraus folgt unmittelbar, dass jeder erfüllende Pfad für φ, $\sigma_{\mathcal{A}_\varphi} = A_0, A_1, \ldots$ in $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ mit der natürlichen Interpretation π_φ ein Modell für φ ist, denn es gilt $(\sigma_{\mathcal{A}_\varphi}, \pi_\varphi, 0) \models \varphi$. Es reicht also im Graph $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ nach einem erfüllenden Pfad für φ zu suchen um Erfüllbarkeit zu testen.

3.3 Entscheidbarkeit

In diesem Abschnitt werden wir einen Algorithmus angeben, der testet ob ein erfüllender Pfad existiert und somit gleichzeitig testet, ob eine gegebene Formel φ erfüllbar ist oder nicht.

Definition 3.12 *Ein Graph heisst* zusammenhängend*, falls zwischen je zwei* verschiedenen *Ecken A, B ein Pfad von A nach B existiert.*

Man beachte, dass mit dieser Definition ein Graph bestehend aus einer Ecke und ohne Kanten ein zusammenhängender Graph ist!

Definition 3.13 *Ein nicht-leerer zusammenhängender Subgraph $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ heisst* auto-erfüllend*, falls*

$$\forall A \in \mathcal{C},\ \forall(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \quad \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in A \quad \Longrightarrow \quad \exists B \in \mathcal{C}\ ,\ sodass\ \beta \in B$$

Lemma 3.14 *Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ zusammenhängende Subgraphen von $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ und ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, dann gilt:*

$$\mathcal{C}\ ist\ auto\text{-}erf\ddot{u}llend \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}'\ ist\ auto\text{-}erf\ddot{u}llend$$

Beweis

> *Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}$ auto-erfüllend, dann nehmen wir ein beliebiges $A \in \mathcal{C}'$, sodass $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in A$. Da $\mathcal{C}'$ zusammenhängend und $\mathcal{C}$ nicht leer ist, gibt es ein von A erreichbares $B \in \mathcal{C}$:*
> $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in A \in \mathcal{C}' \stackrel{L\ 3.8.i}{\Longrightarrow} \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B$ *oder es gibt ein C zwischen A und B, sodass $\beta \in C$. Im zweiten Fall sind wir fertig.*
> $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B \stackrel{\mathcal{C}\ auto\text{-}erf.}{\Longrightarrow} \exists D \in \mathcal{C}$, *sodass* $\beta \in D \stackrel{\subseteq}{\Longrightarrow} \exists D \in \mathcal{C}'$, *sodass* $\beta \in D$

$\ddot\smile$

Ein unendlicher Pfad durch einen endlichen Graph durchläuft mindestens eine Ecke unendlich oft. Betrachten wir den Subgraph bestehend aus allen Ecken, die unendlich oft durchlaufen werden, so ist offensichtlich, dass dieser zusammenhängend sein muss. Betrachten wir einen erfüllenden Pfad für φ durch $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$, so bilden also die Atome die unendlich oft getroffen werden einen nicht-leeren zusammenhängenden Subgraph. Da dieser Pfad erfüllend ist, muss dieser Subgraph auto-erfüllend sein. Es lässt sich also folgendes festhalten: Ein erfüllender Pfad für φ startet mit einem Atom $A \ni \varphi$ und bleibt irgendwann in einem auto-erfüllenden Subgraph.

Um effizient einen erfüllenden Pfad zu suchen, werden wir den Graph $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ sukzessive reduzieren, indem wir «unbrauchbare» Atome löschen. Als Konsequenz aus vorherigem Lemma, betrachten wir nur maximal zusammenhängende Subgraphen, also zusammenhängende Subgraphen, die nicht in echt grösseren eingebettet sind:

Definition 3.15 *Ein maximal zusammenhängender Subgraph $\mathcal{C}$ von $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ ist* unbrauchbar*, falls eine der beiden folgenden Punkte zutrifft:*

- *$\mathcal{C}$ ist nicht erreichbar von einem Atom, das φ enthält.*
- *$\mathcal{C}$ ist nicht auto-erfüllend und hat keine ausgehenden Kanten.*

Der Algorithmus besteht nun darin, die unbrauchbaren maximal zusammenhängenden Subgraphen nacheinander zu löschen und am Ende zu testen, ob der resultierende Graph leer ist oder nicht.

Algorhitmus 3.16 *Gegeben sei eine Formel φ und der dazugehörige Graph $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$. Da der Graph endlich ist, kann es auch nur endlich viele unbrauchbare Subgraphen geben.*

- $(\mathcal{A}_0, \mathcal{R}_0) := (\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$
- $i = 0$
  wiederhole solange es unbrauchbare Subgraphen hat:

  $\mathcal{C}_i :=$ *nächster unbrauchbarer Subgraph*
  $\mathcal{A}_{i+1} := \mathcal{A}_i \setminus \mathcal{C}_i$
  $\mathcal{R}_{i+1} := \mathcal{R}_i \cap \mathcal{A}_{i+1} \times \mathcal{A}_{i+1}$
  $i := i + 1$
- $(\bar{\mathcal{A}}_\varphi, \bar{\mathcal{R}}_\varphi) := (\mathcal{A}_n, \mathcal{R}_n)$ *(n = Anzahl Wiederholungen in Schritt 2)*

Lemma 3.17 *Ein erfüllender Pfad für φ in $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ ist ein erfüllender Pfad für φ in $(\bar{\mathcal{A}}_\varphi, \bar{\mathcal{R}}_\varphi)$*

Beweis

Aus Def. 3.15 und L. 3.14 folgt, dass ein unbrauchbarer Subgraph nicht erreichbar ist von einem Atom $A \ni \varphi$ oder keinen auto-erfüllenden Subgraph enthalten kann. Ein erfüllender Pfad für φ kann daher nicht durch einen unbrauchbaren Subgraph laufen. Also: Ein erfüllender Pfad für φ in $(\mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i)$ ist ein erfüllender Pfad für φ in $(\mathcal{A}_{i+1}, \mathcal{R}_{i+1})$. Der Rest folgt mit Induktion nach der Anzahl n der Wiederholungen im Algorithmus.

$\ddot\smile$

Theorem 3.18 *Für beliebige Formeln φ gilt:*

$$\varphi \textit{ ist erfüllbar} \iff \bar{\mathcal{A}}_\varphi \neq \emptyset$$

Beweis

≪⇒≫:

φ *erfüllbar* $\overset{Kor\ 3.10}{\Longrightarrow}$ *es gibt einen erfüllenden Pfad für* φ *in* $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$
$\overset{L\ 3.17}{\Longrightarrow}$ *es gibt einen erfüllenden Pfad für* φ *in* $(\bar{\mathcal{A}}_\varphi, \bar{\mathcal{R}}_\varphi) \Longrightarrow \bar{\mathcal{A}}_\varphi \neq \emptyset$

≪⇐≫:

Ist der Graph nicht leer, so besteht er ausschliesslich aus ≪brauchbaren≫ Subgraphen. Diese sind erreichbar von einem Atom $A \ni \varphi$ *und entweder auto-erfüllend oder haben ausgehende Kanten. Es können aber nicht alle brauchbaren Subgraphen nur ausgehende Kanten haben und gleichzeitig nicht auto-erfüllend sein, da sonst der Graph unendlich sein müsste (und es unendlich viele brauchbare Subgraphen geben müsste). Der Graph ist aber endlich und daher muss mindestens ein brauchbarer Subgraph auto-erfüllend sein. Daher:*
$\bar{\mathcal{A}}_\varphi \neq \emptyset \Longrightarrow$ *es gibt ein Pfad* $A_0, \ldots, A_{n-1}$*, sodass* $\varphi \in A_0$ *und* A_{n-1} *in einem auto-erfüllenden Subgraph ist* $\Longrightarrow$ *es gibt einen erfüllenden Pfad für* φ *in* $(\bar{\mathcal{A}}_\varphi, \bar{\mathcal{R}}_\varphi) \overset{\subseteq}{\Longrightarrow}$ *es gibt einen erfüllenden Pfad für* φ *in* $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi) \overset{Th\ 3.11}{\Longrightarrow} \varphi$ *ist erfüllbar*

$\ddot\smile$

4 Ein Beweissystem für PLTL

Wir präsentieren im Folgenden ein Beweissystem für PLTL, welches wir aus [?] entnommen haben. Ganz allgemein besteht ein Beweissystem aus Axiomen und Schlussregeln, mit deren Hilfe sich Formeln herleiten lassen. Sinn und Zweck ist, alle gültigen Formeln herleiten zu können (Vollständigkeit) und umgekehrt, dass alle hergeleiteten Formeln gültig sind (Korrektheit).

4.1 Axiome und Schlussregeln

Axiome von PLTL:

A0	Instanzen aussagenlogischer Tautologien	
A1	$\bigcirc\neg\alpha \leftrightarrow \neg\bigcirc\alpha$	(selbst-dual)
A2	$\bigcirc(\alpha \to \beta) \to \bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta$	($K^{\bigcirc}$)
A3	$\Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$	($K^{\Box}$)
A4	$\Box(\alpha \to \bigcirc\alpha) \to \alpha \to \Box\alpha$	(Induktion)
A5	$\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \leftrightarrow \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta))$	(Fixpunkt)
A6	$\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \to \Diamond\beta$	

Als aussagenlogische Tautologien werden auch Substitutionen davon betrachtet, so ist zum Beispiel $\Box\alpha \vee \neg\Box\alpha$ eine Tautologie.
A1 besagt, dass sich $\bigcirc$ zu sich selbst dual verhält.
A2 und A3 sind die K-Axiome für $\Box$ und $\bigcirc$.
A4 entspricht dem Induktionsprinzip von $\mathbb{N}$.
A5 nennen wir Fixpunkt-Axiom. Mit seiner Hilfe kann eine $\mathcal{U}$-Formel unendlich «aufgeblasen» werden. Die $\mathcal{U}$-Formel im linken Teil kommt rechts als Subformel wieder vor und kann wiederum mit dem ganzen rechten Teil ersetzt werden. Dieser Vorgang lässt sich beliebig oft wiederholen und so lassen sich beliebig grosse Formeln herleiten, die folgende Struktur aufweisen:

$$\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \leftrightarrow \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\beta \vee \alpha \wedge \bigcirc(\beta \vee \ldots \wedge \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)\ldots)))$$

Auf diese Weise können beliebig viele $\bigcirc$ «abgespalten» werden, jedoch in der innersten Klammer bleibt stets $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta$ übrig. Dieses lässt sich nicht eliminieren, daher der Name Fixpunkt-Axiom. Dieses Axiom ist auch verantwortlich, dass es sich bei PLTL um eine *nicht-kompakte* Logik handelt (vgl. Abschnitt 6.3).

Schlussregeln sind Regeln, wie von vorhandenen Formeln auf neue geschlossen werden kann.

Schlussregeln von PLTL:

$Gen^{\Box}$	aus α schliesse $\Box\alpha$
$Gen^{\bigcirc}$	aus α schliesse $\bigcirc\alpha$
MP	aus α und $\alpha \to \beta$ schliesse β

$Gen^{\Box}$ und $Gen^{\bigcirc}$ sind die Generalisierungsregeln für die beiden (modal-artigen) Operatoren $\Box$ und $\bigcirc$.
MP ist der gewöhnliche Modus Ponens.

Eine *(PLTL-)Herleitung* einer Formel φ besteht nun aus einer Folge von Formeln $\psi_0, \ldots, \psi_n$, sodass $\psi_n = \varphi$ gilt und alle ψ_i für $i \leq n$ entweder Axiome sind oder mit einer Schlussregel aus früheren Folgegliedern $\psi_k,\ k < i$, geschlossen wurden.

Formeln die sich aus den sechs Axiomen und den drei Schlussregeln herleiten lassen nennen wir *(PLTL-)Theoreme*. Ist α ein Theorem so schreiben wir $\vdash \alpha$. Für beliebige Formelmengen Σ schreiben wir $\Sigma \vdash \alpha$, falls es endlich viele Formeln $\beta_0, \ldots, \beta_n \in \Sigma$ gibt, sodass $\vdash \beta_0 \wedge \ldots \wedge \beta_n \to \alpha$ gilt.

Wenden wir uns nochmals dem Fixpunkt-Axiom zu: Reduziert man dieses Axiom auf $\Diamond$- und $\Box$-Formeln, so erhält man folgende Bemerkung:

Bemerkung 4.1

$$\vdash \Diamond\alpha \leftrightarrow \alpha \vee \bigcirc\Diamond\alpha$$

und

$$\vdash \Box\alpha \leftrightarrow \alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha$$

Das oben beschriebene ≪Aufblasen≫ sieht dann so aus:

Bemerkung 4.2

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \vdash \Diamond\alpha \leftrightarrow \alpha \vee \bigcirc\alpha \vee \ldots \vee \bigcirc^n\alpha \vee \bigcirc^{n+1}\Diamond\alpha$$

und

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \vdash \Box\alpha \leftrightarrow \alpha \wedge \bigcirc\alpha \wedge \ldots \wedge \bigcirc^n\alpha \wedge \bigcirc^{n+1}\Box\alpha$$

$\bigcirc^n\alpha$ bedeutet dabei $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\ldots\bigcirc}_{n\ mal}\alpha$. Hier gilt das Gleiche wie oben: Es lassen sich beliebig viele $\bigcirc$ abspalten, aber das letzte Glied enthält stets noch ein $\Diamond$ (bzw. $\Box$). Die Herleitungen dieser Theoreme stehen im Anhang, benötigen aber das später folgende Theorem 4.4.

4.2 Korrektheit

Theorem 4.3 *PLTL ist korrekt*

Beweis

> *Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges PLTL-Modell und $i \in \mathbb{N}$ ein beliebiger Zeitpunkt darin. Wir zeigen, dass die Axiome in $\mathcal{M}, i$ gültig sind und dass die Regeln Gültigkeit bewahren.*
> *A0: ist klar*

A1:

$$\mathcal{M}, i \models \bigcirc\neg\alpha \overset{Def \models}{\iff} \mathcal{M}, i+1 \models \neg\alpha \overset{Def \models}{\iff} \mathcal{M}, i+1 \not\models \alpha$$
$$\overset{Def \models}{\iff} \mathcal{M}, i \not\models \bigcirc\alpha \overset{Def \models}{\iff} \mathcal{M}, i \models \neg\bigcirc\alpha$$

A2:

$$\mathcal{M}, i \models \bigcirc(\alpha \to \beta) \overset{Def \models}{\iff} \mathcal{M}, i+1 \models \alpha \to \beta$$
$$\overset{Def \models}{\iff} \mathcal{M}, i+1 \not\models \alpha \text{ oder } \mathcal{M}, i+1 \models \beta \text{ (1)}$$
$$\mathcal{M}, i \models \bigcirc\alpha \overset{Def \models}{\iff} \mathcal{M}, i+1 \models \alpha \text{ (2)}$$
$$\text{(1) und (2)} \implies \mathcal{M}, i+1 \models \beta \overset{Def \models}{\implies} \mathcal{M}, i \models \bigcirc\beta$$

A3:

$$\mathcal{M}, i \models \Box(\alpha \to \beta) \overset{Def \models}{\iff} \forall k \geq i\ \mathcal{M}, k \models \alpha \to \beta$$
$$\overset{Def \models}{\iff} \forall k \geq i\ \mathcal{M}, k \not\models \alpha \text{ oder } \mathcal{M}, k \models \beta \text{ (1)}$$
$$\mathcal{M}, i \models \Box\alpha \overset{Def \models}{\iff} \forall k \geq i\ \mathcal{M}, k \models \alpha \text{ (2)}$$
$$\text{(1) und (2)} \implies \forall k \geq i\ \mathcal{M}, k \models \beta \overset{Def \models}{\implies} \mathcal{M}, i \models \Box\beta$$

A4:

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{\mathcal{M}, i \models \Box(\alpha \to \bigcirc\alpha)} & \\
\iff & \forall k \geq i\ \mathcal{M}, k \models \alpha \to \bigcirc\alpha & \text{Def. } \models \\
\iff & \forall k \geq i\ \mathcal{M}, k \not\models \alpha \text{ oder } \mathcal{M}, k \models \bigcirc\alpha & \text{Def. } \models \\
\iff & \forall k \geq i\ \mathcal{M}, k \not\models \alpha \text{ oder } \mathcal{M}, k+1 \models \alpha & \text{Def. } \models \\
\implies & \forall k \geq i\ \mathcal{M}, k \not\models \alpha \text{ oder } \forall j > k\ \mathcal{M}, j \models \alpha & \\
\implies & \forall k \geq i\ \mathcal{M}, k \models \alpha \to \Box\alpha & \text{Def. } \models
\end{array}$$

A5:

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{\text{«}\to\text{»: } \mathcal{M}, i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta} & \\
\iff & \exists k \geq i, \text{ sodass } \mathcal{M}, k \models \beta \text{ und } \forall j, i \leq j < k,\ \mathcal{M}, j \models \alpha & \text{Def. } \models \\
\multicolumn{2}{l}{\text{1. Fall: } k = i\text{: } \mathcal{M}, i \models \beta \overset{Def \models}{\implies} \mathcal{M}, i \models \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta))} & \\
\multicolumn{2}{l}{\text{2. Fall: } k > i\text{: } \exists k' \geq i+1, \text{ sodass } \mathcal{M}, k' \models \beta \text{ und}} & \\
 & \quad \mathcal{M}, i \models \alpha \text{ und } \forall j, i+1 \leq j < k',\ \mathcal{M}, j \models \alpha & \\
\implies & \mathcal{M}, i \models \alpha \wedge \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) & \text{Def. } \models \\
\implies & \mathcal{M}, i \models \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)) & \text{Def. } \models \\
\multicolumn{2}{l}{\text{«}\leftarrow\text{»: } \mathcal{M}, i \models \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta))} & \\
\implies & \mathcal{M}, i \models \beta \text{ oder } (\mathcal{M}, i \models \alpha \text{ und } \mathcal{M}, i+1 \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta) & \\
\multicolumn{2}{l}{\text{1. Fall: } \mathcal{M}, i \models \beta \overset{Def \models}{\implies} \mathcal{M}, i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta} & \\
\multicolumn{2}{l}{\text{2. Fall: } \mathcal{M}, i \models \alpha \text{ und } \mathcal{M}, i+1 \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta} & \\
\implies & \mathcal{M}, i \models \alpha \text{ und } \exists k \geq i+1, \text{ sodass } \mathcal{M}, k \models \beta \text{ und} & \\
 & \forall j, i+1 \leq j < k,\ \mathcal{M}, j \models \alpha & \text{Def. } \models \\
\implies & \exists k \geq i, \text{ sodass } \mathcal{M}, k \models \beta \text{ und } \forall j, i \leq j < k,\ \mathcal{M}, j \models \alpha & \\
\implies & \mathcal{M}, i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta & \text{Def. } \models
\end{array}$$

A6:

$$\mathcal{M}, i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta$$
$$\overset{Def \models}{\Longleftrightarrow} \quad \exists k \geq i, \text{ sodass } \mathcal{M}, k \models \beta \text{ und } \forall j\ i \leq j < k\ \mathcal{M}, j \models \alpha \quad \overset{Bem\ 2.7}{\Longrightarrow}$$
$$\mathcal{M}, i \models \Diamond\beta$$

Wir haben gezeigt, dass alle Axiome in beliebigen Modellen zu beliebigen Zeitpunkten erfüllt sind, daher sind sie alle gültig. Für die Schlussregeln von PLTL ist offensichtlich, dass sie Gültigkeit bewahren. Ist eine Formel α gültig, so ist sie in jedem Modell zu jedem Zeitpunkt gültig, dann sind aber natürlich auch $\Box\alpha$ und $\bigcirc\alpha$ gültig. Modus Ponens ist ebenfalls klar.

4.3 Vollständigkeit

Unser nächstes Ziel ist zu beweisen, dass unser Beweissystem vollständig ist. Jede gültige Formel sollte herleitbar sein. Die Grundidee besteht darin, den Ablauf des Algorithmus syntaktisch zu imitieren. Betrachten wir eine gültige Formel φ, so wissen wir, dass $\neg\varphi$ nicht erfüllbar ist. Lässt man den Algorithmus mit $\neg\varphi$ laufen, würde also am Schluss ein leerer Graph übrigbleiben. Wir werden sehen, dass das syntaktische Imitieren des Algorithmus uns einen Beweis für φ liefern wird, womit Vollständigkeit bewiesen wäre.

Zuerst aber präsentieren wir ein paar Theoreme und abgeleitete Schlussregeln von $PLTL$. Es sind alles Beispiele, die später im Beweis benutzt werden, ansonsten aber nicht unbedingt relevant sind.

Theorem 4.4 *Folgende Regeln können von PLTL abgeleitet werden:*

KS	$\vdash \alpha \rightarrow \beta$	*und*	$\vdash \beta \rightarrow \gamma$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \rightarrow \gamma$
KP	$\vdash \alpha \rightarrow \beta$			$\Longrightarrow$	$\vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$
R1	$\vdash \beta$			$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \rightarrow \beta$
R2	$\vdash \alpha \rightarrow \gamma$	*und*	$\vdash \beta \rightarrow \delta$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$
R3	$\vdash \alpha \rightarrow \beta \vee \gamma$	*und*	$\vdash \alpha \rightarrow \neg\gamma$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \rightarrow \beta$
R4	$\vdash \alpha \rightarrow \gamma$	*und*	$\vdash \beta \rightarrow \gamma$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$
R5	$\vdash \alpha \rightarrow \beta$	*und*	$\vdash \alpha \rightarrow \gamma$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma$
R$\bigcirc$	$\vdash \alpha \rightarrow \beta$			$\Longrightarrow$	$\vdash \bigcirc\alpha \rightarrow \bigcirc\beta$
R$\Box$	$\vdash \alpha \rightarrow \beta$			$\Longrightarrow$	$\vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$
IND	$\vdash \alpha \rightarrow \bigcirc\alpha$			$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \rightarrow \Box\alpha$

Folgende Formeln sind PLTL-Theoreme:

T1 $\bigcirc(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \bigcirc\alpha \vee \bigcirc\beta$

T2 $\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta \leftrightarrow \bigcirc(\alpha \wedge \beta)$

T3 $\Box\alpha \vee \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$

T4 $\Box\alpha \wedge \Box\beta \leftrightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$

T5 $\Box \bigcirc \alpha \wedge \Box \bigcirc \beta \rightarrow \Box \bigcirc (\alpha \wedge \beta)$

T6 $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

T7 $\Box\alpha \rightarrow \Box \bigcirc \alpha$

Beweis

Die Regeln KS, KP und R1-R5 sind bereits aussagenlogisch gültige Regeln und können sehr einfach mit geeigneten Tautologien und Modus Ponens abgeleitet werden. R$\bigcirc$,R$\Box$ und IND folgen aus den Axiomen $K^{\bigcirc}$,$K^{\Box}$ und Induktion (vgl. Anhang für Details).
T1:

1.	$\bigcirc(\neg\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg \bigcirc \neg\alpha \vee \bigcirc\beta$	*A2*
2.	$\alpha \vee \beta \rightarrow \neg\neg\alpha \vee \beta$	*Tautologie*
3.	$\bigcirc(\alpha \vee \beta) \rightarrow \bigcirc(\neg\neg\alpha \vee \beta)$	*R$\bigcirc$(2)*
4.	$\neg \bigcirc \neg\alpha \vee \bigcirc\beta \rightarrow \bigcirc\alpha \vee \bigcirc\beta$	*R2(A1,$\bigcirc\beta \rightarrow \bigcirc\beta$)*
5.	$\bigcirc(\alpha \vee \beta) \rightarrow \bigcirc\alpha \vee \bigcirc\beta$	*KS(KS(3,1),4)*
6.	$\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$	*Tautologie*
7.	$\bigcirc\alpha \rightarrow \bigcirc(\alpha \vee \beta)$	*R$\bigcirc$(6)*
8.	$\bigcirc\beta \rightarrow \bigcirc(\alpha \vee \beta)$	*analog 6,7*
9.	$\bigcirc\alpha \vee \bigcirc\beta \rightarrow \bigcirc(\alpha \vee \beta)$	*R4(7,8)*
10.	$\bigcirc(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \bigcirc\alpha \vee \bigcirc\beta$	*9 $\wedge$ 5*

T2 lässt sich wegen A1 einfach auf T1 zurückführen.
T3:

1.	$\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$	*Tautologie*
2.	$\Box\alpha \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	*R$\Box$(1)*
3.	$\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	*analog 1,2*
4.	$\Box\alpha \vee \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	*R4(2,3)*

T4:

1.	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$	*Tautologie*
2.	$\Box\alpha \rightarrow \Box(\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$	*R$\Box$(1)*
3.	$\Box\alpha \rightarrow \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$	*KS(2,A3)*
4.	$(\Box\alpha \rightarrow \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$	*Tautologie*
5.	$\Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$	*MP(4,3)*
6.	$\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$	*Tautologie*
7.	$\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha$	*R$\Box$(6)*
8.	$\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta$	*analog 6,7*

9. $\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$ *R5(7,8)*
10. $\Box\alpha \wedge \Box\beta \leftrightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$ *$5 \wedge 9$*

T5:

1. $\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta \to \bigcirc(\alpha \wedge \beta)$ *T2*
2. $\Box(\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta) \to \Box \bigcirc (\alpha \wedge \beta)$ *R$\Box$(1)*
3. $\Box \bigcirc \alpha \wedge \Box \bigcirc \beta \to \Box(\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta)$ *T4*
4. $\Box \bigcirc \alpha \wedge \Box \bigcirc \beta \to \Box \bigcirc (\alpha \wedge \beta)$ *KS(3,2)*

T6:

1. $\Box\alpha \to \bigcirc\Box\alpha$ *Bem. 4.1*
2. $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ *IND(1)*

T7:

1. $\Box\alpha \to \bigcirc\Box\alpha$ *Bem. 4.1*
2. $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ *T6*
3. $\Box\alpha \to \alpha$ *Bem. 4.1*
4. $\bigcirc\Box\alpha \to \bigcirc\alpha$ *R$\bigcirc$(3)*
5. $\Box\alpha \to \bigcirc\alpha$ *KS(1,4)*
6. $\Box\Box\alpha \to \Box \bigcirc \alpha$ *R$\Box$(5)*
7. $\Box\alpha \to \Box \bigcirc \alpha$ *KS(2,6)*

Schauen wir uns nun also den Algorithmus nochmals an. Wir wollen wissen ob eine Formel φ gültig ist und füttern daher den Algorithmus mit $\neg\varphi$. Lässt man ihn so laufen, entsteht eine Folge von Graphen

$$(\mathcal{A}_{\neg\varphi}, \mathcal{R}_{\neg\varphi}) =: (\mathcal{A}_0, \mathcal{R}_0), \dots, (\mathcal{A}_n, \mathcal{R}_n) := (\bar{\mathcal{A}}_{\neg\varphi}, \bar{\mathcal{R}}_{\neg\varphi})$$

für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$.

Bevor wir nun zeigen, was es mit dem «syntaktischen Imitieren» auf sich hat, wollen wir noch ein paar Konventionen bezüglich Notation vereinbaren:

Notation 4.5 *Ist $Q = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine endliche Formelmenge, so schreiben wir*

$$\bigwedge Q := \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$$

für die Konjunktion der einzelnen Elemente. Analog lässt sich $\bigvee Q$ definieren. Für leere Q ist dann

$$\bigwedge Q = \bigwedge \emptyset = \top$$
$$\bigvee Q = \bigvee \emptyset = \bot$$

Für Atome $A \in \mathcal{A}_\varphi$ schreiben wir abkürzend

$$\hat{A} := \bigwedge A$$

Auf diese Weise können die einzelnen Atome als Formeln interpretiert werden.

Die Theoreme auf den nächsten Seiten beweisen Formeln, die den Graph $(\mathcal{A}_0, \mathcal{R}_0)$ betreffen. Sie dienen alle als Vorbereitung für Theorem 4.15, welches Aussagen über Formeln macht, die einen beliebigen Zwischengraph $(\mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i)$ betreffen, insbesondere den letzten Graph $(\bar{\mathcal{A}}_{\neg\varphi}, \bar{\mathcal{R}}_{\neg\varphi})$.

Theorem 4.6 *Für beliebige Atome A und B gilt:*

$$A \neq B \quad \Longrightarrow \quad \vdash \hat{A} \rightarrow \neg\hat{B}$$

Beweis

$A \neq B \quad \Longrightarrow \quad \exists\alpha$, sodass $\alpha \in A$ und $\neg\alpha \in B$
daher ist $\hat{A} \rightarrow \neg\hat{B}$ eine Tautologie.

$\ddot{\smile}$

Theorem 4.7

$$\vdash \bigvee_{A \in \mathcal{A}_0} \hat{A}$$

Beweis

Sei $cl(\neg\varphi) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\alpha_1, \ldots, \neg\alpha_n\}$: Um das Theorem zu beweisen, rufen wir uns nochmals in Erinnerung, wie wir die Menge der Atome konstruiert haben (vgl. Bsp. 3.4). Da haben wir in einem ersten Schritt die Mengen $B_1, \ldots, B_{2^n}$ konstruiert, die alle die ersten beiden Bedingungen für Atome erfüllen. Die tatsächlichen Atome erhielten wir durch systematisches Streichen der Mengen, die eine der weiteren Bedingungen für Atome verletzten. Dieser Beweis hat dieselbe Struktur wie jene Konstruktion.

Wir beginnen mit der Tautologie $\;(\alpha_1 \vee \neg\alpha_1) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n \vee \neg\alpha_n)$
Bringt man diese Formel gemäss den de Morganschen Regeln in eine disjunktive Form, so erhalten wir die Disjunktion über die Konjunktionen der B_i's.

Es gilt also: $\vdash \hat{B}_1 \vee \ldots \vee \hat{B}_{2^n}$
Wir zeigen, dass für jedes B_i welches kein Atom ist, $\vdash \neg\hat{B}_i$ gilt:
Es gibt fünf Fälle weshalb B_i kein Atom ist.
1. Fall: $\exists(\alpha \vee \beta) \in B_i$, sodass $\alpha \notin B_i$ und $\beta \notin B_i$
$\Longrightarrow \quad \neg\alpha \in B_i$ *und* $\neg\beta \in B_i$
$\Longrightarrow \quad \hat{B}_i \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha \wedge \neg\beta \wedge \ldots$
$\Longrightarrow \quad \neg\hat{B}_i \equiv \neg(\alpha \vee \beta) \vee \alpha \vee \beta \vee \ldots$ *(Tautologie)*
$\Longrightarrow \quad \vdash \neg\hat{B}_i$
2. Fall: $\exists(\alpha \vee \beta) \in cl(\neg\varphi)$, sodass $\alpha \in B_i$ und $\alpha \vee \beta \notin B_i$
$\Longrightarrow \quad \hat{B}_i \equiv \alpha \wedge (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \ldots$
$\Longrightarrow \quad \neg\hat{B}_i \equiv \neg\alpha \vee \alpha \vee \beta \vee \ldots$ *(Tautologie)*
$\Longrightarrow \quad \vdash \neg\hat{B}_i$

3. Fall: $\exists(\alpha \vee \beta) \in cl(\neg\varphi)$, *sodass* $\beta \in B_i$ *und* $\alpha \vee \beta \notin B_i$, *analog Fall 2*
4. Fall: $\exists(\alpha \mathcal{U} \beta) \in B_i$, *sodass* $\alpha \notin B_i$ *und* $\beta \notin B_i$

$$\begin{array}{lll} \vdash \alpha \mathcal{U} \beta \to \alpha \vee \beta & & \textit{mit A5} \\ \Longrightarrow & B_i \vdash \alpha \vee \beta & \alpha \mathcal{U} \beta \in B_i \\ \Longrightarrow & B_i \vdash \neg \hat{B}_i & \neg\alpha, \neg\beta \in B_i \\ \Longrightarrow & \vdash \neg \hat{B}_i & \end{array}$$

5. Fall: $\exists(\alpha \mathcal{U} \beta) \in cl(\neg\varphi)$, *sodass* $\beta \in B_i$ *und* $\alpha \mathcal{U} \beta \notin B_i$

$$\begin{array}{lll} \vdash \beta \to \alpha \mathcal{U} \beta & & \textit{mit A5} \\ \Longrightarrow & B_i \vdash \alpha \mathcal{U} \beta & \beta \in B_i \\ \Longrightarrow & B_i \vdash \neg \hat{B}_i & \alpha \mathcal{U} \beta \notin B_i \\ \Longrightarrow & \vdash \neg \hat{B}_i & \end{array}$$

Für jedes Nicht-Atom B_i *können wir also* $\neg\hat{B}_i$ *beweisen. Mit MP und der Tautologie* $\alpha \vee \beta \to \neg\beta \to \alpha$ *können wir aus der Disjunktion aller* $\hat{B}_i$ *alle Nicht-Atome eliminieren.*

$\ddot\smile$

Theorem 4.8

$$\vdash \alpha \to \bigvee_{\alpha \in A \in \mathcal{A}_0} \hat{A}$$

Beweis

$$\begin{array}{lll} 1. & \hat{A} \to \neg\alpha \ (\forall A,\ \alpha \notin A) & \textit{Tautologie} \\ 2. & \alpha \to \neg\hat{A} \ (\forall A,\ \alpha \notin A) & \textit{KP(1)} \\ 3. & \alpha \to \bigwedge_{\alpha \notin A} \neg\hat{A} & \textit{R5(2)} \\ 4. & \alpha \to \bigvee_{A \in \mathcal{A}_0} \hat{A} & \textit{R1(Th. 4.7)} \\ 5. & \alpha \to \bigvee_{\alpha \in A \in \mathcal{A}_0} \hat{A} & \textit{R3(4,3)} \end{array}$$

$\ddot\smile$

Theorem 4.9 *Für ein beliebiges Atom* $B \in \mathcal{A}_0$ *gilt:*

$$\vdash \hat{B} \to \bigcirc(\underbrace{\bigvee_{A \in \mathcal{A}_0} \hat{A}}_{\gamma})$$

Beweis

$$\begin{array}{lll} 1. & \gamma & \textit{Th. 4.7} \\ 2. & \bigcirc\gamma & \textit{gen}^{\bigcirc}\textit{(1)} \\ 3. & \hat{B} \to \bigcirc\gamma & \textit{R1(2)} \end{array}$$

$\ddot\smile$

Theorem 4.10 *Für beliebige Atome $A, B \in \mathcal{A}_0$ gilt:*

$$(A, B) \notin \mathcal{R}_0 \quad \Longrightarrow \quad \vdash \hat{A} \to \bigcirc\neg\hat{B}$$

Beweis

Es gibt vier Möglichkeiten, weshalb $(A, B) \notin \mathcal{R}_0$ ist:
Fall 1: $\exists \bigcirc \alpha \in cl(\neg\varphi)$, sodass $\bigcirc\alpha \in A$ und $\alpha \notin B$

1.	$\hat{A} \to \bigcirc\alpha$	Taut. ($\bigcirc\alpha \in A$)
2.	$\bigcirc\alpha \to \bigcirc\neg\neg\alpha$	R$\bigcirc$(Taut.)
3.	$\hat{A} \to \bigcirc\neg\neg\alpha$	KS(1,2)
4.	$\hat{B} \to \neg\alpha$	Taut. ($\neg\alpha \in B$)
5.	$\bigcirc\neg\neg\alpha \to \bigcirc\neg\hat{B}$	R$\bigcirc$(KP(4))
6.	$\hat{A} \to \bigcirc\neg\hat{B}$	KS(3,5)

Fall 2: $\exists \bigcirc \alpha \in cl(\neg\varphi)$, sodass $\bigcirc\alpha \notin A$ und $\alpha \in B$

1.	$\hat{A} \to \neg \bigcirc \alpha$	Taut. ($\neg \bigcirc \alpha \in A$)
2.	$\hat{A} \to \bigcirc\neg\alpha$	KS(1,A1)
3.	$\hat{B} \to \alpha$	Taut. ($\alpha \in B$)
4.	$\bigcirc\neg\alpha \to \bigcirc\neg\hat{B}$	R$\bigcirc$(KP(3))
5.	$\hat{A} \to \bigcirc\neg\hat{B}$	KS(2,4)

Fall 3: $\exists(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \in cl(\neg\varphi)$, sodass $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta, \neg\beta \in A$ und $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \notin B$

1.	$\hat{A} \to \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \wedge \neg\beta$	Taut. ($\alpha\,\mathcal{U}\,\beta, \neg\beta \in A$)
2.	$\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \wedge \neg\beta \to \beta \vee \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)$	mit A5
3.	$\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \wedge \neg\beta \to \neg\beta$	Tautologie
4.	$\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \wedge \neg\beta \to \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)$	R3(2,3)
5.	$\hat{A} \to \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)$	KS(1,4)
6.	$\hat{B} \to \neg(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)$	Taut. ($\neg(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \in B$)
7.	$\bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \to \bigcirc\neg\hat{B}$	R$\bigcirc$(KP(6))
8.	$\hat{A} \to \bigcirc\neg\hat{B}$	KS(5,7)

Fall 4: $\exists(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \in cl(\neg\varphi)$, sodass $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B$, $\alpha \in A$ und $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \notin A$

1.	$\hat{A} \to \alpha \wedge \neg(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)$	Taut. ($\alpha, \neg(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \in A$)
2.	$\alpha \wedge \neg(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \to \neg\alpha \vee \neg \bigcirc (\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)$	mit KP(A5)
3.	$\alpha \wedge \neg(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \to \alpha$	Tautologie
4.	$\alpha \wedge \neg(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \to \neg \bigcirc (\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)$	R3(2,3)
5.	$\hat{A} \to \neg \bigcirc (\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)$	KS(1,4)
6.	$\hat{B} \to \alpha\,\mathcal{U}\,\beta$	Taut. ($\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in B$)
7.	$\bigcirc\neg(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \to \bigcirc\neg\hat{B}$	R$\bigcirc$(KP(6))
8.	$\hat{A} \to \bigcirc\neg\hat{B}$	KS(KS(5,A1),7)

$\ddot\smile$

Theorem 4.11

$$A \in \mathcal{A}_0 \quad \Longrightarrow \quad \vdash \hat{A} \to \bigcirc(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_0} \hat{B})$$

Beweis

1.	$\hat{A} \to \bigcirc(\bigvee_{B\in\mathcal{A}_0} \hat{B})$	*Th. 4.9*
2.	$\hat{A} \to \bigvee_{B\in\mathcal{A}_0} \bigcirc\hat{B}$	*KS(1,T1)*
3.	$\hat{A} \to \bigwedge_{(A,B)\notin\mathcal{R}_0} \bigcirc\neg\hat{B}$	*R5(Th. 4.10)*
4.	$\hat{A} \to \bigwedge_{(A,B)\notin\mathcal{R}_0} \neg\bigcirc\hat{B}$	*KS(3,A1)*
5.	$\hat{A} \to \bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_0} \bigcirc\hat{B}$	*R3(2,4)*
6.	$\hat{A} \to \bigcirc(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_0} \hat{B})$	*KS(5,T1)*

Nun machen wir den Schritt von $\bigcirc$ zu $\Box$, dazu bezeichne $\mathcal{R}_0^*$ den reflexiv-transitiven Abschluss von $\mathcal{R}_0$.

Theorem 4.12

$$A \in \mathcal{A}_0 \quad \Longrightarrow \quad \vdash \hat{A} \to \Box(\underbrace{\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_0^*} \hat{B}}_{\gamma})$$

Beweis

Ist A ein beliebiges Atom, dann gilt für Atome B, C mit $(A,B) \in \mathcal{R}_0^*$ und $(B,C) \in \mathcal{R}_0$ natürlich auch $(A,C) \in \mathcal{R}_0^*$, daher ist die erste Zeile eine Tautologie:

1.	$\bigvee_{(B,C)\in\mathcal{R}_0} \hat{C} \to \gamma$	$(\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}_0^*)$	*Taut.* $(\alpha \to \alpha \vee \beta)$
2.	$\bigcirc(\bigvee_{(B,C)\in\mathcal{R}_0} \hat{C}) \to \bigcirc\gamma$	$(\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}_0^*)$	*R*$\bigcirc$*(1)*
3.	$\hat{B} \to \bigcirc(\bigvee_{(B,C)\in\mathcal{R}_0} \hat{C})$	$(\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}_0^*)$	*Th. 4.11*
4.	$\hat{B} \to \bigcirc\gamma$	$(\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}_0^*)$	*KS(3,2)*
5.	$\gamma \to \bigcirc\gamma$		*R4(4)*
6.	$\gamma \to \Box\gamma$		*IND(5)*
7.	$\hat{A} \to \gamma$		*Taut.* ($\mathcal{R}_0^*$ *reflexiv)*
8.	$\hat{A} \to \Box\gamma$		*KS(7,6)*

Das nächste Theorem macht eine Aussage über die Disjunktion aller Atome $\hat{B}$, die von irgendeinem Atom $A \ni \neg\varphi$ erreichbar sind:

Theorem 4.13

$$\vdash \neg\varphi \to \Box(\bigvee_{\neg\varphi\in A} (\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_0^*} \hat{B}))$$

Beweis

1.	$\neg\varphi \to \bigvee_{\neg\varphi\in A} \hat{A}$	Th. 4.8
2.	$\hat{A} \to \Box(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_0^*} \hat{B}) \quad (\forall A,\ \neg\varphi \in A)$	Th. 4.12
3.	$\bigvee_{\neg\varphi\in A} \hat{A} \to \bigvee_{\neg\varphi\in A} \Box(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_0^*} \hat{B})$	R2(2)
4.	$\neg\varphi \to \bigvee_{\neg\varphi\in A} \Box(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_0^*} \hat{B})$	KS(1,3)
5.	$\neg\varphi \to \Box(\bigvee_{\neg\varphi\in A}(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_0^*} \hat{B}))$	KS(4,T3)

Im Folgenden brauchen wir weitere Schlussregeln.

Bemerkung 4.14 *Folgende Regeln können von PLTL abgeleitet werden:*

R6	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$	*und*	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \delta)$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \gamma \wedge \delta)$
R7	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$	*und*	$\vdash \gamma \to \delta$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \delta)$
R8	$\vdash \alpha \to \beta \to \delta$	*und*	$\vdash \alpha \to \gamma \to \epsilon$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \to \beta \vee \gamma \to \delta \vee \epsilon$
R9	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$	*und*	$\vdash \beta \to \neg\gamma$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \to \Box\neg\beta$
R10	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \delta)$	*und*	$\vdash \alpha \to \Box(\gamma \to \delta)$	$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \vee \gamma \to \delta)$
R11	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \bigcirc\beta)$			$\Longrightarrow$	$\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \Box\beta)$
R12	$\vdash \alpha \to \Box(\gamma \to \delta)$	*und*	$\vdash \beta \to \gamma$	$\Longrightarrow$	$\alpha \to \Box(\beta \to \delta)$

Die detaillierten Herleitungen dieser Regeln sind im Anhang nachzusehen.

Die bisherigen Theoreme 4.7 - 4.13 machten alle eine Aussage, die den Ausgangsgraph $(\mathcal{A}_0, \mathcal{R}_0)$ betrafen. Jetzt wollen wir untersuchen, was sich beweisen lässt bezüglich den Zwischengraphen $(\mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i),\ i \leq n$. Im Folgenden stellen wir fünf Behauptungen auf, die wir gleichzeitig per Induktion nach i beweisen wollen.

Theorem 4.15 *Für die ersten drei Behauptungen sei A ein beliebiges Atom:*

Beh 1	$A \notin \mathcal{A}_i$	$\Longrightarrow$	$\vdash \neg\varphi \to \Box\neg\hat{A}$
Beh 2	$A \in \mathcal{A}_i$	$\Longrightarrow$	$\vdash \neg\varphi \to \Box(\hat{A} \to \bigcirc(\bigvee\limits_{(A,B)\in\mathcal{R}_i} \hat{B}))$
Beh 3	$A \in \mathcal{A}_i$	$\Longrightarrow$	$\vdash \neg\varphi \to \Box(\hat{A} \to \Box(\bigvee\limits_{(A,B)\in\mathcal{R}_i^*} \hat{B}))$
Beh 4	$\vdash \neg\varphi \to \bigvee\limits_{\neg\varphi\in A\in\mathcal{A}_i} \hat{A}$		
Beh 5	$\vdash \neg\varphi \to \Box(\bigvee\limits_{\neg\varphi\in A\in\mathcal{A}_i} (\bigvee\limits_{(A,B)\in\mathcal{R}_i^*} \hat{B}))$		

Beweis

Wir beweisen alle fünf Behauptungen gleichzeitig per Induktion nach i:
$i = 0$:
Beh 1 ist trivial, da es kein Atom $A \notin \mathcal{A}_0$ gibt.
Beh 2 und 3 folgen aus den Theoremen 4.11 bzw. 4.12, je mittels Gen$^\Box$ und R1.
Beh 4 und 5 sind die Theoreme 4.8 und 4.13.
$i \to i+1$:
Die fünf Behauptungen seien gültig für i.
Beweis von Beh 1 für i + 1:
Sei $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i)$ derjenige unbrauchbare Subgraph, der beim Übergang von i nach $i+1$ gelöscht wird, d.h. $(\mathcal{A}_{i+1}, \mathcal{R}_{i+1}) = (\mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i) \setminus \mathcal{C}$. Es gibt zwei Fälle, warum $\mathcal{C}$ unbrauchbar ist:
1. Fall: $\mathcal{C}$ ist nicht erreichbar von einem Atom $B \ni \neg\varphi$. Sei nun also $A \in \mathcal{C}$, dann folgt aus Th. 4.6 und R4

$$\vdash \underbrace{(\bigvee_{\neg\varphi \in B \in \mathcal{A}_i} (\bigvee_{(B,C) \in \mathcal{R}_i^*} \hat{C}))}_{\gamma} \to \neg\hat{A} \qquad (*)$$

Man beachte: γ entspricht der Disjunktion über alle Atome, die von irgend einem Atom $B \ni \neg\varphi$ erreichbar sind.

1. $\Box\gamma \to \Box\neg\hat{A}$ R$\Box$(*)
2. $\neg\varphi \to \Box\gamma$ IV Beh 5
3. $\neg\varphi \to \Box\neg\hat{A}$ KS(2,1)

2. Fall: $\mathcal{C}$ hat keine ausgehenden Kanten und ist nicht auto-erfüllend
$\overset{L\ 3.8.i}{\Longrightarrow}$ $\exists(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta)$, *sodass* $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta, \neg\beta \in B$ *für alle Atome* $B \in \mathcal{C}$
Sei also $A \in \mathcal{C}$. Es gilt dann $\mathcal{C} = \{B\ ;\quad (A,B) \in \mathcal{R}_i^*\}$.

1. $\hat{A} \to \alpha\,\mathcal{U}\,\beta$ Taut. ($\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in A$)
2. $\hat{A} \to \Diamond\beta$ KS(1,A6)
3. $\hat{B} \to \neg\beta \qquad (\forall B \in \mathcal{C})$ Taut. ($\neg\beta \in B$)
4. $(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_i^*} \hat{B}) \to \neg\beta$ R4(3)
5. $\Box(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_i^*} \hat{B}) \to \Box\neg\beta$ R$\Box$(4)
6. $\neg\varphi \to \Box(\hat{A} \to \Box(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_i^*} \hat{B}))$ IV Beh 3
7. $\neg\varphi \to \Box(\hat{A} \to \Box\neg\beta)$ R7(5,6)
8. $\neg\varphi \to \Box\neg\hat{A}$ R9(7,2)

Beweis von Beh 2 für i + 1: Sei $A \in \mathcal{A}_{i+1}$ beliebig:

1. $\neg\varphi \to \Box\neg\hat{B} \qquad (\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_{i+1})$ Beh 1
2. $\neg\varphi \to \Box\bigcirc\neg\hat{B} \qquad (\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_{i+1})$ KS(1,T7)
3. $\neg\varphi \to \bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \Box\bigcirc\neg\hat{B}$ R5(2)
4. $\neg\varphi \to \Box\bigcirc(\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B})$ KS(3,T5)
5. $\bigcirc(\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B}) \to \hat{A} \to \bigcirc(\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B})$ Taut. ($\alpha \to \beta \to \alpha$)

6. $\Box \bigcirc (\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B})$
$\quad \to \Box(\hat{A} \to \bigcirc(\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B}))$ *R□(5)*
7. $\neg\varphi \to \Box(\hat{A} \to \bigcirc(\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B}))$ *KS(4,6)*
8. $\neg\varphi \to \Box(\hat{A} \to \bigcirc(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_i} \hat{B}))$ *IV*
9. $\neg\varphi \to \Box(\hat{A} \to \bigcirc(\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B}) \wedge \bigcirc(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_i} \hat{B}))$ *R6(7,8)*
10. $\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B} \wedge \bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_i} \hat{B} \to \bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_{i+1}} \hat{B}$ *Taut. $(\neg\beta \wedge (\alpha \vee \beta) \to \alpha)$*
11. $\bigcirc(\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B} \wedge \bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_i} \hat{B})$
$\quad \to \bigcirc(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_{i+1}} \hat{B})$ *R◯(10)*
12. $\bigcirc(\bigwedge_{(A,B)\in\mathcal{R}_i\setminus\mathcal{R}_{i+1}} \neg\hat{B}) \wedge \bigcirc(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_i} \hat{B})$
$\quad \to \bigcirc(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_{i+1}} \hat{B})$ *KS(T2,11)*
13. $\neg\varphi \to \Box(\hat{A} \to \bigcirc(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}_{i+1}} \hat{B}))$ *R7(9,12)*

Beweis von Beh 3 für $i+1$: Sei $A \in \mathcal{A}_{i+1}$ beliebig:

Die Herleitung geht analog zu jener von Theorem 4.12. Sei auch hier $\gamma := \bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}^*_{i+1}} \hat{B}$

1. $\bigvee_{(B,C)\in\mathcal{R}_{i+1}} \hat{C} \to \gamma$ $\quad (\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}^*_{i+1})$ *Tautologie*
2. $\bigcirc(\bigvee_{(B,C)\in\mathcal{R}_{i+1}} \hat{C}) \to \bigcirc\gamma$ $\quad (\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}^*_{i+1})$ *R◯(1)*
3. $\neg\varphi \to \Box(\hat{B} \to \bigcirc(\bigvee_{(B,C)\in\mathcal{R}_{i+1}} \hat{C}))$ $\quad (\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}^*_{i+1})$ *Beh 2*
4. $\neg\varphi \to \Box(\hat{B} \to \bigcirc\gamma)$ $\quad (\forall B,\ (A,B) \in \mathcal{R}^*_{i+1})$ *R7(3,2)*
5. $\neg\varphi \to \Box(\gamma \to \bigcirc\gamma)$ *R10(4)*
6. $\neg\varphi \to \Box(\gamma \to \Box\gamma)$ *R11(5)*
7. $\hat{A} \to \gamma$ *Taut. ($\mathcal{R}^*_{i+1}$ reflexiv)*
8. $\neg\varphi \to \Box(\hat{A} \to \Box\gamma)$ *R12(6,7)*

Beweis von Beh 4 für $i+1$:

1. $\neg\varphi \to \neg\hat{A}$ $\quad (\forall A \in \mathcal{A}_i \setminus \mathcal{A}_{i+1})$ *KS(Beh 1, Bem. 4.1)*
2. $\neg\varphi \to \bigwedge_{A\in\mathcal{A}_i\setminus\mathcal{A}_{i+1}} \neg\hat{A}$ *R5(1)*
3. $\neg\varphi \to \bigvee_{\neg\varphi\in A\in\mathcal{A}_i} \hat{A}$ *IV*
4. $\neg\varphi \to \bigvee_{\neg\varphi\in A\in\mathcal{A}_{i+1}} \hat{A}$ *R3(3,2)*

Beweis von Beh 5 für $i+1$:

In der folgenden Herleitung machen wir Gebrauch von der Tautologie

$$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \quad (T)$$

1. $\neg\varphi \to \hat{A} \to \Box(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}^*_{i+1}} \hat{B})$ $\quad (\forall A \in \mathcal{A}_{i+1})$ *KS(Beh 3, Bem. 4.1)*
2. $\neg\varphi \to \bigvee_{\neg\varphi\in A\in\mathcal{A}_{i+1}} \hat{A} \to \bigvee_{\neg\varphi\in A\in\mathcal{A}_{i+1}} \Box(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}^*_{i+1}} \hat{B})$ *R8(1)*
3. $\neg\varphi \to \bigvee_{\neg\varphi\in A\in\mathcal{A}_{i+1}} \hat{A}$ *Beh 4*
4. $\neg\varphi \to \bigvee_{\neg\varphi\in A\in\mathcal{A}_{i+1}} \Box(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}^*_{i+1}} \hat{B})$ *MP(MP(T,2),3)*
5. $\neg\varphi \to \Box(\bigvee_{\neg\varphi\in A\in\mathcal{A}_{i+1}}(\bigvee_{(A,B)\in\mathcal{R}^*_{i+1}} \hat{B}))$ *KS(4,T3)*

Jetzt ist es mit Hilfe von Beh 4 und der Tautologie $(\neg\alpha \to \bot) \to \alpha$ einfach, Vollständigkeit zu beweisen:

Theorem 4.16

$$\models \varphi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \varphi$$

Beweis

Sei also φ eine gültige Formel:
$\models \varphi \quad \Longrightarrow \quad \neg\varphi$ *ist nicht erfüllbar* $\quad \overset{\textit{Th 3.18}}{\Longrightarrow} \quad \bar{\mathcal{A}}_{\neg\varphi} = \emptyset \quad \overset{\textit{Beh 4}}{\Longrightarrow} \quad \vdash \neg\varphi \to \bigvee \emptyset$
$\quad \Longrightarrow \quad \vdash \neg\varphi \to \bot \quad \Longrightarrow \quad \vdash \varphi$

$\ddot\smile$

5 Gleitend und verankert - zwei Versionen

Im Kommentar zur Definition 2.6 erwähnten wir eine alternative Variante Gültigkeit einer Formel in einem Modell zu definieren, die so genannte *verankerte* Version. In diesem Kapitel wollen wir die beiden Varianten vergleichen und diskutieren.

5.1 Definition der Begriffe

Definition 5.1 *Sei $\mathcal{M} = (\sigma_S, \pi)$ ein Modell und α eine beliebige Formel:*

- $\mathcal{M} \models \alpha \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N} \;\; \mathcal{M}, i \models \alpha$ *(gleitend)*
- $\mathcal{M} \Vdash \alpha \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}, 0 \models \alpha$ *(verankert)*

Wir verwenden also das Symbol $\Vdash$ für Gültigkeit nach verankerter Version. Für beide Varianten bleiben die Modelle die gleichen und auch die Definition der Gültigkeit zu einzelnen Zeitpunkten ist gleich. Der einzige Unterschied betrifft die Frage, wann eine Formel α in einem Modell $\mathcal{M}$ gültig sein soll. Die gleitende Version sagt, dass α in $\mathcal{M}$ gültig ist, wenn sie es zu allen Zeitpunkten von $\mathcal{M}$ ist und entspricht damit der allgemeinen Praxis für Modallogiken. Die verankerte Version besagt, dass α in $\mathcal{M}$ gültig ist, wenn sie es am Anfang (zum Zeitpunkt 0) ist.

Folgende Zusammenhänge sind direkt aus der Definition der Begriffe ersichtlich:

$$\mathcal{M} \models \alpha \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M} \Vdash \alpha$$

sowie

$$\mathcal{M} \models \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M} \Vdash \Box\alpha$$

Die verankerte Version ist offensichtlich die weniger strenge Definition. Man kann darin die gleitende Version «simulieren», indem man nur $\Box$-Formeln betrachtet. Nun sind aber vor allem die gültigen Formeln von Interesse, also diejenigen, die in allen Modellen gültig sind. Wie unterscheidet sich die Menge derjenigen Formeln, die in allen Modellen zu allen Zeitpunkten gültig sind, von der Menge der Formeln, die in allen Modellen zum Zeitpunkt 0 gültig sind? In Kapitel 4 zeigten wir ein Beweissystem, welches genau die Formeln der erst genannten Menge herleiten kann. Wie sieht ein Beweissystem aus, mit welchem sich genau die Formeln der zweit genannten Menge herleiten lassen?

Notation 5.2 *Sei $\sigma_S = s_0, s_1, \dots$ eine beliebige Folge über einer beliebigen Menge S und $\mathcal{M} = (\sigma_S, \pi)$ ein Modell. Wir bezeichnen mit σ_S^k diejenige Folge, die mit σ_S identisch ist, aber erst an der k-ten Stelle beginnt.*

$$\sigma_S^k := s_k, s_{k+1}, \dots$$

Mit $\mathcal{M}^k := (\sigma_S^k, \pi)$ bezeichnen wir das entsprechende Modell.

Das folgende Theorem zeigt, dass die beiden Versionen der Gültigkeit äquivalent sind bezüglich der Menge der gültigen Formeln.

Theorem 5.3

$$\models \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \Vdash \alpha$$

Beweis

> *Die Implikation von links nach rechts ist trivial, die Gegenrichtung hingegen überrascht vielleicht auf den ersten Blick. Nehmen wir an α sei nicht gültig:*
> $\not\models \alpha \quad \Longrightarrow \quad$ *es gibt ein Modell $\mathcal{M}$ und $i \in \mathbb{N}$, sodass $\mathcal{M}, i \not\models \alpha$*
> $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M}^i \not\Vdash \alpha \quad \Longrightarrow \quad \not\Vdash \alpha$

$\ddot\smile$

Der Beweis zeigt, wenn es ein Modell und ein Zeitpunkt k gibt in der eine Formel α nicht gültig ist, so ist in demselben Modell, das einfach die ersten $i < k$ Zeitpunkte weg lässt, α auch aus verankerter Sicht nicht gültig. Also sind die beiden Definitionen letztlich äquivalent. Wenn etwas zu den Anfangszeitpunkten in allen Modellen gilt, so auch zu allen Zeitpunkten in allen Modellen.

Die erste Frage ist damit beantwortet, die Menge der gültigen Formeln ist für beide Versionen die gleiche. Was aber ist die Motivation verschiedener Definitionen, wenn es doch keine wesentlichen Unterschiede zu verzeichnen gibt? Dazu ist erstmal zu sagen, dass es sehr wohl Unterschiede gibt, sobald man die Sprache mit Vergangenheits-Operatoren erweitert. Der Anfangszeitpunkt ist nämlich der einzige Zeitpunkt in einem Modell, der keinen Vorgängerzeitpunkt besitzt, und das ist ein wesentlicher Unterschied. Bezeichnet $\boxdot$ das Pendant zu $\Box$ für die Vergangenheit, so gilt zum Beispiel $\Vdash \boxdot\bot$, aber $\not\models \boxdot\bot$.

Die Motivation für die verankerte Version liegt in der Anwendung zur Überprüfung von nebenläufigen Programmen. Der Programmablauf entspricht einem Modell und mit $PLTL$-Formeln lassen sich Eigenschaften des Programms beschreiben. Die verankerte Version widerspiegelt die Sicht, dass das Programm im Anfangszustand, also bevor es startet, die gewünschten Eigenschaften erfüllen soll.

5.2 Ein Beweissystem für die verankerte Version

Auch die zweite Frage, jene nach einem vollständigen Beweissystem für die verankerte Version, ist nun natürlich beantwortet. Die Definitionen sind (die Zukunft betreffend) äquivalent, also ist das Beweissystem aus Kapitel 4 auch vollständig bezüglich der verankerten Version. Ein Problem ergibt sich allerdings, wenn man eine erweiterte Sprache mit Vergangenheits-Operatoren betrachtet. Das Beweissystem aus Kapitel 4 lässt sich einfach mit zusätzlichen Axiomen und Regeln für diese Operatoren erweitern und so ist dann die Axiomatisierung des Zukunftfragments Teil einer Axiomatisierung für Zukunft *und* Vergangenheit. Dies gilt jedoch nur für die gleitende Version. Eine solche Erweiterung könnte die verankerte Version mit Vergangenheit nicht axiomatisieren! Das ist nicht befriedigend und wir geben daher im Folgenden ein Beweissystem für die verankerte Version an, das sich für Vergangenheit erweitern lässt. Es ist das Beweissystem, das in [?] verwendet wird und der Vergleich mit dem Beweissystem aus Kapitel 4 wird einige Aufschlüsse geben. Zuerst definieren wir aber weitere abkürzende syntaktische Zeichen, um das Beweissystem lesbarer zu gestalten:

Notation 5.4

$$\alpha \Rightarrow \beta :\equiv \Box(\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\alpha \Leftrightarrow \beta :\equiv \Box(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

Axiome:

A0'	$\Box\alpha$ falls α Tautologie
A1'	$\bigcirc\neg\alpha \Leftrightarrow \neg\bigcirc\alpha$
A2'	$\bigcirc(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow (\bigcirc\alpha \rightarrow \bigcirc\beta)$
A3'	$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$
A4'	$(\alpha \Rightarrow \bigcirc\alpha) \rightarrow (\alpha \Rightarrow \Box\alpha)$
A5'	$\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \Leftrightarrow \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta))$
A6'	$\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \Rightarrow \Diamond\beta$
A7'	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$
A8'	$\Box\alpha \rightarrow \Box\bigcirc\alpha$

Regeln:

MP aus α und $\alpha \rightarrow \beta$ schliesse β

Am Meisten fällt auf, dass die beiden Generalisierungsregeln für $\Box$ und $\bigcirc$ fehlen. Die Aufgabe eines Beweissystems ist, ausschliesslich gültige Formeln zu produzieren. In der verankerten Version bedeutet «gültig» jeweils zum Zeitpunkt 0 gültig zu sein, daher darf man nicht so ohne weiteres generalisieren! Das Beispiel von vorher, $\boxdot\bot$, ist gültig und könnte ein zusätzliches Axiom für die Vergangenheit sein. $\Box\boxdot\bot$ hingegen ist keine gültige Formel, ebensowenig wie $\bigcirc\boxdot\bot$. Dies sind Beispiele die zeigen, dass es keine Generalisierungsregel geben darf, weder für $\Box$ noch für $\bigcirc$.

Bei den Axiomen fällt weiter auf, dass sie den Axiomen aus Kapitel 4 sehr ähnlich sind. Oft steht ein $\Rightarrow$ an Stelle von $\rightarrow$, aber sie haben jeweils die gleiche Struktur. Es sind jedoch zwei Axiome mehr (A7' und A8'), die uns aber auch irgendwie bekannt vorkommen. Schauen wir die Axiome mal im Detail an:
A0' bis A6' entsprechen den Axiomen A0 bis A6 aus Kapitel 4, sie sind einfach generalisiert. Das heisst A0' $\equiv \Box$A0, A1' $\equiv \Box$A1 usw. Eine Ausnahme bildet das Induktions-Axiom (A4), A4' entspricht nicht exakt der generalisierten Form von A4, allerdings lässt sich A4' aus $\Box$A4 herleiten. Da die Umkehrung nicht zutrifft ist A4' etwas schwächer als $\Box$A4. Im Wesentlichen bilden aber diese ersten sieben Axiome genau die sieben Axiome aus Kapitel 4 in generalisierter Form.

A7' und A8' haben wir als Theoreme kennen gelernt (vgl. Bemerkung 4.1 und T7). Aus Bemerkung 4.1 wissen wir, dass A7' die Reduktion von A5 auf $\Box$-Formeln ist. Reduziert man aber A5', so lässt sich lediglich die Formel $\Box\alpha \Rightarrow \alpha$ herleiten, was der generalisierten Form von A7' entspricht, aber nicht A7 selber. Wir haben bis jetzt nur Formeln in generalisierter Form gesehen, aber wir können $\Box$ nicht abschneiden. Genau deshalb braucht es A7' um $\Box$ abschneiden zu können, um nicht nur generalisierte Formeln zu erhalten. Wenn man das Fixpunkt-Axiom A5' reduziert, bedürfe es eben genau A7' selbst um A7' herleiten zu können, daher muss es (oder etwas Äquivalentes) als Axiom eingeführt werden! Jetzt braucht es auch keine Generalisierungsregel mehr, da

$$\Box\alpha \Rightarrow \Box\Box\alpha$$

ein Theorem ist (analog T6). Die Formeln werden durch die Axiome in generalisierter Form in eine Herleitung gebracht und generalisierte Formeln können mit diesem Theorem und mit Modus Ponens beliebig weiter generalisiert werden. mit A7' und Modus Ponens kann man $\Box$ abschneiden, mit A8' (und A7') kann $Gen^{\bigcirc}$ abgeleitet werden.

6 Kanonisches Modell

Der Vollständigkeitsbeweis aus Kapitel 4 hat die schöne Eigenschaft, dass er konstruktiv ist. Das heisst, das Beweisverfahren für eine gegebene gültige Formel liefert tatsächlich eine Herleitung und kann daher zum automatischen Herleiten genutzt werden.

Häufig jedoch benutzt man ein anderes Verfahren um Vollständigkeit zu beweisen, indem man für eine nicht-herleitbare Formel ein Gegenmodell konstruiert - das *kanonische Modell*. Bewiesen wird also

$$\nvdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \nvDash \varphi$$

6.1 Maximal konsistente Mengen

Das kanonisches Modell verwendet maximal konsistente Mengen, ähnlich den Atomen in der Tableau-Konstruktion.

Definition 6.1 *Eine Formelmenge Σ ist eine* maximal konsistente Menge*, falls*

- $\Sigma \nvdash \bot$ *(Konsistenz) und*
- $\forall\alpha \quad \alpha \in \Sigma$ *oder* $\neg\alpha \in \Sigma$ *(Maximalität)*

MCS bezeichne die Menge aller maximal konsistenten Mengen.

Korollar 6.2 *Maximal konsistente Mengen sind deduktiv abgeschlossen und besitzen die Disjunktionseigenschaft. Das heisst für beliebige α, β und $\Sigma \in MCS$ gilt:*

- $\Sigma \vdash \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \Sigma$
- $\alpha \vee \beta \in \Sigma \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \Sigma$ *oder* $\beta \in \Sigma$

Beweis

$\Sigma \vdash \alpha \quad \overset{\Sigma \nvdash \bot}{\Longrightarrow} \quad \neg\alpha \notin \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \Sigma$

Die Gegenrichtung ist trivial.

Sei $\alpha \in \Sigma$ *oder* $\beta \in \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \Sigma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \vee \beta \in \Sigma$

Sei $\alpha \notin \Sigma$ *und* $\beta \notin \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \neg\alpha \in \Sigma$ *und* $\neg\beta \in \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \Sigma \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$

$\quad \Longrightarrow \quad \neg\alpha \wedge \neg\beta \in \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \notin \Sigma \quad \overset{Def\ \wedge}{\Longrightarrow} \quad \alpha \vee \beta \notin \Sigma$

$\ddot\smile$

Lemma 6.3 *Ist eine Formel φ nicht herleitbar, so gibt es eine maximal konsistente Menge Σ, die φ nicht enthält, d.h.*

$$\nvdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \exists\Sigma \in MCS, \text{ sodass } \varphi \notin \Sigma$$

Beweis

Der Beweis ist als Lindenbaum[1]*-Konstruktion bekannt und nützt die Eigenschaft, dass die Menge der Formeln aufzählbar ist. Sei also $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ eine Aufzählung aller Formeln: Wir konstruieren Σ wie folgt:*

$$
\begin{array}{lcl}
\Sigma_0 & := & \{\neg\varphi\} \\
\Sigma_{n+1} & := & \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\alpha_n\}, \textit{ falls } \Sigma_n \cup \{\alpha_n\} \not\vdash \bot \\ \Sigma_n \cup \{\neg\alpha_n\}, \textit{ sonst} \end{cases} \\
\Sigma & := & \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i
\end{array}
$$

Durch die Art der Konstruktion ist klar, dass Σ konsistent und maximal ist.

$\ddot\smile$

Bemerkung 6.4 *Mit derselben Konstruktionsweise lässt sich beweisen, dass jede konsistente Formelmenge Γ in einer maximal konsistenten Menge $\Sigma \in MCS$ enthalten ist. Dazu setzt man einfach $\Sigma_0 = \Gamma$.*

6.2 Konstruktion des kanonischen Modells

Wir definieren nun zwei zweistellige Relationen in MCS:

Definition 6.5

$$(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box \quad :\Longleftrightarrow \quad \{\alpha\ ; \quad \Box\alpha \in \Sigma\} \subseteq \Gamma$$
$$(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\bigcirc \quad :\Longleftrightarrow \quad \{\alpha\ ; \quad \bigcirc\alpha \in \Sigma\} \subseteq \Gamma$$

Korollar 6.6 *$\mathcal{R}_\Box$ und $\mathcal{R}_\bigcirc$ besitzen folgende Eigenschaften:*

- $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\bigcirc \quad \Longrightarrow \quad (\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box$
- *$\mathcal{R}_\Box$ ist reflexiv und transitiv*
- *$\mathcal{R}_\bigcirc$ ist funktional ($(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\bigcirc$ und $(\Sigma, \Gamma') \in \mathcal{R}_\bigcirc \quad \Longrightarrow \quad \Gamma = \Gamma'$)*
- *$\mathcal{R}_\bigcirc$ ist seriell ($\forall\Sigma\ \exists\Gamma,\ (\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\bigcirc$)*

Beweis

Die Behauptungen folgen unmittelbar aus der deduktiven Abgeschlossenheit maximal konsistenter Mengen und der Tatsache, dass folgende Formeln Theoreme sind:

(1) $\vdash \Box\alpha \to \bigcirc\alpha$ (mit T7, Bem. 4.1 und KS)

(2) $\vdash \Box\alpha \to \alpha$ (Bem. 4.1)

[1] Adolf Lindenbaum (1904-1941), polnischer Mathematiker und Logiker

(3) $\vdash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ *(T6)*

(4) $\vdash \bigcirc\neg\alpha \leftrightarrow \neg\bigcirc\alpha$ *(A1)*

z.z. $\mathcal{R}_{\bigcirc} \subseteq \mathcal{R}_{\Box}$*: Sei* $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_{\bigcirc}$
$\Box\alpha \in \Sigma \overset{(1)}{\Longrightarrow} \bigcirc\alpha \in \Sigma \overset{Def\ \mathcal{R}_{\bigcirc}}{\Longrightarrow} \alpha \in \Gamma$
also gilt $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_{\Box}$
z.z. $\mathcal{R}_{\Box}$ *ist reflexiv: Sei* $\Sigma \in MCS$ *beliebig:*
$\Box\alpha \in \Sigma \overset{(2)}{\Longrightarrow} \alpha \in \Sigma$
also gilt $(\Sigma, \Sigma) \in \mathcal{R}_{\Box}$
z.z. $\mathcal{R}_{\Box}$ *ist transitiv: Sei* $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_{\Box}$ *und* $(\Gamma, \Delta) \in \mathcal{R}_{\Box}$*:*
$\Box\alpha \in \Sigma \overset{(3)}{\Longrightarrow} \Box\Box\alpha \in \Sigma \overset{Def\ \mathcal{R}_{\Box}}{\Longrightarrow} \Box\alpha \in \Gamma \overset{Def\ \mathcal{R}_{\Box}}{\Longrightarrow} \alpha \in \Delta$
also gilt $(\Sigma, \Delta) \in \mathcal{R}_{\Box}$
z.z. $\mathcal{R}_{\bigcirc}$ *ist funktional: Sei* $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_{\bigcirc}$ *und* $(\Sigma, \Gamma') \in \mathcal{R}_{\bigcirc}$*:*
$\alpha \in \Gamma \overset{Def\ MCS}{\Longrightarrow} \neg\alpha \notin \Gamma \overset{Def\ \mathcal{R}_{\bigcirc}}{\Longrightarrow} \bigcirc\neg\alpha \notin \Sigma \overset{(4)}{\Longrightarrow} \neg\bigcirc\alpha \notin \Sigma$
$\overset{Def\ MCS}{\Longrightarrow} \bigcirc\alpha \in \Sigma \overset{Def\ \mathcal{R}_{\bigcirc}}{\Longrightarrow} \alpha \in \Gamma'$
analog lässt sich zeigen: $\alpha \in \Gamma' \Longrightarrow \alpha \in \Gamma$
also gilt $\Gamma = \Gamma'$*, d.h.* $\mathcal{R}_{\bigcirc}$ *ist funktional*
z.z. $\mathcal{R}_{\bigcirc}$ *ist seriell: Sei* $\Sigma \in MCS$ *beliebig:*
Wir zeigen, dass $\Gamma := \{\beta\ ;\quad \bigcirc\beta \in \Sigma\}$ *eine max. konsistente Menge ist. Für beliebige Formeln* α *gilt* $\bigcirc\alpha \in \Sigma$ *oder* $\neg\bigcirc\alpha \in \Sigma \overset{(4)}{\Longrightarrow} \bigcirc\alpha \in \Sigma$ *oder* $\bigcirc\neg\alpha \in \Sigma$
$\overset{Def\ \mathcal{R}_{\bigcirc}}{\Longrightarrow} \alpha \in \Gamma$ *oder* $\neg\alpha \in \Gamma$
Bleibt noch die Konsistenz von Γ *zu zeigen:*
Gegenannahme: Es gelte $\Gamma \vdash \bot$

$\Longrightarrow \exists\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$*, sodass* $\vdash \gamma_0 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \to \bot$ *Def.* $\vdash$
$\Longrightarrow \vdash \neg\gamma_0 \vee \ldots \vee \neg\gamma_n$
$\Longrightarrow \vdash \bigcirc\neg\gamma_0 \vee \ldots \vee \bigcirc\neg\gamma_n$ *mit* $R\bigcirc$*, T1*
$\Longrightarrow \vdash \neg\bigcirc\gamma_0 \vee \ldots \vee \neg\bigcirc\gamma_n$ *mit A1*
$\Longrightarrow \Sigma \vdash \bot$ *(Widerspruch)* $\bigcirc\gamma_i \in \Sigma$

also ist $\Gamma \in MCS$*, ausserdem gilt* $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_{\bigcirc}$ *und daher ist* $\mathcal{R}_{\bigcirc}$ *seriell.*

Korollar 6.7 *Für beliebige* $\Sigma \in MCS$ *gilt:*

$$(\forall\Gamma,\ (\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_{\Box} \Longrightarrow \alpha \in \Gamma) \Longrightarrow \Box\alpha \in \Sigma$$

Beweis

Sei $\Box\alpha \notin \Sigma$*. Definiere* $G := \{\beta\ ;\quad \Box\beta \in \Sigma\} \cup \{\neg\alpha\}$*. Wir zeigen zuerst, dass* G *konsistent ist:*
Nehmen wir an, G *sei nicht konsistent:*
$G \vdash \bot \overset{Def \vdash}{\Longrightarrow} \exists\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in G$*, sodass* $\vdash \gamma_0 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \wedge \neg\alpha \to \bot$
$\Longrightarrow \vdash \neg\gamma_0 \vee \ldots \vee \neg\gamma_n \vee \alpha \Longrightarrow \vdash \gamma_0 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \to \alpha$
$\overset{R\Box, T4, KS}{\Longrightarrow} \vdash \Box\gamma_0 \wedge \ldots \wedge \Box\gamma_n \to \Box\alpha \overset{\Box\gamma_i \in \Sigma}{\Longrightarrow} \Sigma \vdash \Box\alpha \overset{Kor\ 6.2}{\Longrightarrow} \Box\alpha \in \Sigma$

Dies widerspricht der Voraussetzung und daher ist G konsistent. Wegen Bem. 6.4 gibt es ein $\Gamma \in MCS$, sodass $G \subseteq \Gamma$ gilt. Es gilt $\alpha \notin \Gamma$ und $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box$.

$\ddot\smile$

Für eine gegebene nicht herleitbare Formel φ sei $S_\varphi \subseteq MCS$ eine Menge, die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$S_\varphi = \{\Gamma\ ; \quad (\Sigma_0, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box\} \quad \text{für ein festes } \Sigma_0 \text{, sodass } \varphi \notin \Sigma_0$$

S_φ ist die von Σ_0 und $\mathcal{R}_\Box$ generierte Teilmenge von MCS. Folgendes Lemma hält die wichtigen Eigenschaften von S_φ fest:

Lemma 6.8 *S_φ ist abgeschlossen unter $\mathcal{R}_\bigcirc$ und $\mathcal{R}_\Box$ verhält sich* linear *bezüglich S_φ. Das heisst im Einzelnen:*

- $\forall \Gamma \in S_\varphi, \quad (\Gamma, \Delta) \in \mathcal{R}_\bigcirc \quad \Longrightarrow \quad \Delta \in S_\varphi$
- $\forall \Gamma, \Delta \in S_\varphi, \quad (\Gamma, \Delta) \in \mathcal{R}_\Box$ *oder* $(\Delta, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box$

Beweis

Der erste Punkt folgt unmittelbar aus Kor. 6.6 Punkt 1 und 2. Die Linearität von $(S_\varphi, \mathcal{R}_\Box)$ folgt aus der Tatsache, dass folgende Formel für beliebige α und β ein Theorem ist:

T8 $\vdash \Box(\Box\alpha \to \beta) \vee \Box(\Box\beta \to \alpha)$

Die Herleitung dieses Theorems ist im Anhang detailliert aufgeschrieben.
Seien also $\Gamma, \Delta \in S_\varphi$ und die Formel β beliebig, sodass $(\Gamma, \Delta) \notin \mathcal{R}_\Box$ und $\Box\beta \in \Delta$. Wir beweisen $\beta \in \Gamma$, daraus folgt dann $(\Delta, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box$.
$(\Gamma, \Delta) \notin \mathcal{R}_\Box$ *und* $\Box\beta \in \Delta$
$\overset{\text{Def } \mathcal{R}_\Box}{\Longrightarrow}$ $\exists \alpha$, *sodass* $\Box\alpha \in \Gamma$ *und* $\alpha \notin \Delta$ $\overset{\Box\beta \in \Delta}{\Longrightarrow}$ $\Box\beta \to \alpha \notin \Delta$
$\overset{(\Sigma_0, \Delta) \in \mathcal{R}_\Box}{\Longrightarrow}$ $\Box(\Box\beta \to \alpha) \notin \Sigma_0$ $\overset{\text{T8, K 6.2}}{\Longrightarrow}$ $\Box(\Box\alpha \to \beta) \in \Sigma_0$ $\overset{(\Sigma_0, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box}{\Longrightarrow}$ $\Box\alpha \to \beta \in \Gamma$
$\overset{\Box\alpha \in \Gamma, \text{ K 6.2}}{\Longrightarrow}$ $\beta \in \Gamma$

$\ddot\smile$

6.3 Nicht-Kompaktheit und Filtration

$(S_\varphi, \mathcal{R}_\Box, \mathcal{R}_\bigcirc)$ ist kein PLTL-Frame[2], denn dazu müsste $\mathcal{R}_\bigcirc^* = \mathcal{R}_\Box$ gelten, wobei mit $\mathcal{R}_\bigcirc^*$ der reflexiv-transitive Abschluss von $\mathcal{R}_\bigcirc$ gemeint ist. Dies ist aber nicht der Fall, wegen der Nicht-Kompaktheit von PLTL. Eine Logik Λ heisst *kompakt*, falls sie für beliebige Λ-Formelmengen Δ folgende Äquivalenz erfüllt:

[2]Ein Frame bezeichnet die Struktur eines Modells (also ohne Interpretation π)

$$\Delta \text{ hat ein Modell} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{jede endliche Teilmenge von } \Delta \text{ hat ein Modell.}$$

PLTL besitzt diese Eigenschaft nicht. Als Gegenbeispiele dienen Formelmengen der Art

$$\{\Diamond\neg\alpha, \alpha, \bigcirc\alpha, \bigcirc\bigcirc\alpha, \bigcirc\bigcirc\bigcirc\alpha, \ldots\}$$

Hier besitzt jede endliche Teilmenge ein Modell, aber kein Modell erfüllt gleichzeitig alle diese Formeln. Andererseits ist keines der folgenden Formeln ein PLTL-Theorem:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \not\vdash \Diamond\neg p \to \bigcirc^n \neg p$$

Eine unmittelbare Konsequenz aus dem Fixpunkt-Axiom (vgl. Bem. 4.1 und Bem. 4.2). Daher sind solche Mengen konsistent und nach Bemerkung 6.4 in gewissen maximal konsistenten Mengen Σ enthalten. Nun ist $\Box\alpha \notin \Sigma$ und daher gibt es mit Korollar 6.7 ein Γ, sodass $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box$ und $\alpha \notin \Gamma$ gilt. Dann gibt es aber kein $\mathcal{R}_\bigcirc$-Pfad von Σ nach Γ. Es gibt also ein Γ, sodass $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box$ und $(\Sigma, \Gamma) \notin \mathcal{R}^*_\bigcirc$ gilt.

Die Vorgehensweise um dieses Problem zu lösen heisst *Filtration* und funktioniert für viele nicht-kompakte (Modal-)Logiken. Dazu definieren wir die Filtermenge F_φ wie folgt:

Definition 6.9 *F_φ sei die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:*

- $\varphi \in F_\varphi$
- $\alpha \in F_\varphi \quad \Longrightarrow \quad sub(\alpha) \subseteq F_\varphi$
- $\Box\alpha \in F_\varphi \quad \Longrightarrow \quad \bigcirc\Box\alpha \in F_\varphi$
- $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in F_\varphi \quad \Longrightarrow \quad \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta), \Box\neg\beta \in F_\varphi$

Es ist leicht zu sehen, dass F_φ endlich ist. Nun bilden wir mit Hilfe von F_φ eine Äquivalenzrelation auf S_φ:

$$\Sigma \sim \Gamma \quad :\Longleftrightarrow \quad \Sigma \cap F_\varphi = \Gamma \cap F_\varphi$$

Reflexivität, Transitivität und Symmetrie von $\sim$ folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften von $=$ und so ist $\sim$ also tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Mit $\bar{\Sigma}$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von Σ und S_{F_φ} sei die Menge aller Äquivalenzklassen:

$$\bar{\Sigma} := \{\Gamma\,; \quad \Sigma \sim \Gamma\} \qquad S_{F_\varphi} := S_\varphi / \sim$$

Aus der Endlichkeit von F_φ folgt, dass auch S_{F_φ} endlich ist. Nun benötigen wir noch Relationen $\mathcal{R}'_\bigcirc$ und $\mathcal{R}'_\Box$ auf der Menge S_{F_φ}. Diese müssen folgende Bedingungen erfüllen:

F1: $(\Sigma, \Gamma) \in \mathcal{R}_\bigcirc \quad \Longrightarrow \quad (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \mathcal{R}'_\bigcirc$

F2: $(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \mathcal{R}'_\bigcirc \quad \Longrightarrow \quad \{\alpha\,; \quad \bigcirc\alpha \in \Sigma \cap F_\varphi\} \subseteq \Gamma$

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, sagen wir $\mathcal{R}'_{\bigcirc}$ ist eine F_φ-Filtration von $\mathcal{R}_{\bigcirc}$. Eine F_φ-Filtration von $\mathcal{R}_{\Box}$ wird analog definiert.
Wir definieren nun folgende Relation auf S_{F_φ} und zeigen anschliessend, dass es sich um eine F_φ-Filtration von $\mathcal{R}_{\bigcirc}$ handelt:

$$(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc} \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \Sigma' \in \bar{\Sigma}, \exists \Gamma' \in \bar{\Gamma}, \text{ sodass } (\Sigma', \Gamma') \in \mathcal{R}_{\bigcirc}$$

Korollar 6.10 *$\bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$ ist eine F_φ-Filtration von $\mathcal{R}_{\bigcirc}$*

Beweis

F1 ist trivialerweise erfüllt, bleibt noch F2 zu zeigen:
Sei dazu $(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \exists \Sigma' \in \bar{\Sigma}, \exists \Gamma' \in \bar{\Gamma}, \textit{ sodass } (\Sigma', \Gamma') \in \mathcal{R}_{\bigcirc} && {\scriptstyle Def.\ \bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}}\\
&\Longrightarrow \quad \{\alpha\ ; \quad \bigcirc\alpha \in \Sigma'\} \subseteq \Gamma' && {\scriptstyle Def.\ \mathcal{R}_{\bigcirc}}\\
&\Longrightarrow \quad \{\alpha\ ; \quad \bigcirc\alpha \in \Sigma' \cap F_\varphi\} \subseteq \Gamma' \cap F_\varphi &&\\
&\Longrightarrow \quad \{\alpha\ ; \quad \bigcirc\alpha \in \Sigma \cap F_\varphi\} \subseteq \Gamma \cap F_\varphi \subseteq \Gamma && {\scriptstyle \Sigma \sim \Sigma',\, \Gamma \sim \Gamma'}
\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass der reflexiv-transitive Abschluss $\bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc}$ von $\bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$ eine F_φ-Filtration von $\mathcal{R}_{\Box}$ ist. Dazu benötigen wir aber zuerst das folgende Lemma:

Lemma 6.11 *Für jedes $X \subseteq S_{F_\varphi}$ gibt es eine Formel δ_X, sodass für beliebige $\Sigma \in S_\varphi$ gilt:*

$$\delta_X \in \Sigma \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\Sigma} \in X$$

Beweis

Sei $X = \{\bar{\Sigma}_1, \ldots, \bar{\Sigma}_n\}$ und sei weiter $F_\varphi^C := F_\varphi \cup \{\neg\alpha\ ; \quad \alpha \in F_\varphi\}$ der Abschluss unter einfacher Negation von F_φ.
Definiere

$$\delta_X := \bigwedge(\Sigma_1 \cap F_\varphi^C) \vee \ldots \vee \bigwedge(\Sigma_n \cap F_\varphi^C)$$

Wir zeigen, dass δ_X die gewünschte Eigenschaft besitzt:

$$\begin{aligned}
&\delta_X \in \Sigma \quad \overset{Kor\ 6.2}{\Longleftrightarrow} \quad \bigwedge(\Sigma_i \cap F_\varphi^C) \in \Sigma \textit{ für ein } i,\ 1 \le i \le n\\
&\Longleftrightarrow \quad \Sigma_i \sim \Sigma \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\Sigma} \in X
\end{aligned}$$

Lemma 6.12

$$\bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc} \textit{ ist eine } F_\varphi\textit{-Filtration von } \mathcal{R}_{\Box}$$

Beweis

F1: z.z. $(\Sigma,\Gamma)\in\mathcal{R}_\Box \implies (\bar\Sigma,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$*:*
Sei also $(\Sigma,\Gamma)\in\mathcal{R}_\Box$ *und sei weiter* $\Delta\in S_\varphi$ *mit* $(\Gamma,\Delta)\in\mathcal{R}_\bigcirc$ *(ein solches* Δ *existiert, da* $\mathcal{R}_\bigcirc$ *seriell ist).*
Wir definieren die Menge $X_\Sigma := \{\bar\Gamma\ ;\quad (\bar\Sigma,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc\}$*, die von* $\bar\Sigma$ *und* $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$ *generierte Teilmenge von* S_{F_φ}*. Jetzt gibt es nach Lemma 6.11 eine Formel* δ_{X_Σ} *mit der entsprechenden Eigenschaft.*
Zuerst wollen wir zeigen, dass entweder $\neg\delta_{X_\Sigma}\in\Gamma$ *oder* $\bigcirc\delta_{X_\Sigma}\in\Gamma$*:*
Nehmen wir also an, $\neg\delta_{X_\Sigma}\notin\Gamma$

$\overset{\text{Def MCS}}{\Longrightarrow}\ \delta_{X_\Sigma}\in\Gamma\ \overset{\text{L 6.11}}{\Longrightarrow}\ (\bar\Sigma,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc\ \overset{\text{F1 für }\mathcal{R}_\bigcirc}{\Longrightarrow}\ (\bar\Sigma,\bar\Delta)\in\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$

$\overset{\text{L 6.11}}{\Longrightarrow}\ \delta_{X_\Sigma}\in\Delta\ \overset{\text{Def }\mathcal{R}_\bigcirc}{\Longrightarrow}\ \bigcirc\delta_{X_\Sigma}\in\Gamma$

Also gilt $\neg\delta_{X_\Sigma}\in\Gamma$ *oder* $\bigcirc\delta_{X_\Sigma}\in\Gamma$

$\implies \delta_{X_\Sigma}\to\bigcirc\delta_{X_\Sigma}\in\Gamma$ — Kor. 6.2
$\implies \Box(\delta_{X_\Sigma}\to\bigcirc\delta_{X_\Sigma})\in\Sigma$ — Kor. 6.7
$\implies \delta_{X_\Sigma}\to\Box\delta_{X_\Sigma}\in\Sigma$ — Kor. 6.2, A4
$\implies \Box\delta_{X_\Sigma}\in\Sigma$ — Kor. 6.2, $\delta_{X_\Sigma}\in\Sigma$
$\implies \delta_{X_\Sigma}\in\Gamma$ — $(\Sigma,\Gamma)\in\mathcal{R}_\Box$
$\implies \bar\Gamma\in X_\Sigma$ — L. 6.11
$\implies (\bar\Sigma,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$ — Def. X_Σ

F2: z.z. $(\bar\Sigma,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc \implies \{\alpha\ ;\quad \Box\alpha\in\Sigma\cap F_\varphi\}\subseteq\Gamma$
Wir zeigen zuerst:

$$(\bar\Sigma,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}^n_\bigcirc \implies \{\Box\alpha\ ;\quad \Box\alpha\in\Sigma\cap F_\varphi\}\subseteq\Gamma\cap F_\varphi \quad (*)$$

mit Induktion nach n:
$n=0$*:* $\bar\Sigma=\bar\Gamma \implies \Sigma\sim\Gamma \implies \Sigma\cap F_\varphi=\Gamma\cap F_\varphi$
$\implies \{\Box\alpha\ ;\quad \Box\alpha\in\Sigma\cap F_\varphi\}\subseteq\Gamma\cap F_\varphi$
$n\to n+1$*:* $(\bar\Sigma,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}^{n+1}_\bigcirc$
$\implies \exists\Delta\in S_\varphi$*, sodass* $(\bar\Sigma,\bar\Delta)\in\bar{\mathcal{R}}^n_\bigcirc$ *und* $(\bar\Delta,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$
$\implies \{\Box\alpha\ ;\quad \Box\alpha\in\Sigma\cap F_\varphi\}\subseteq\Delta\cap F_\varphi$ — IV
$\implies \{\bigcirc\Box\alpha\ ;\quad \Box\alpha\in\Sigma\cap F_\varphi\}\subseteq\Delta\cap F_\varphi$ — Bem. 4.1, Def. F_φ
$\implies \{\Box\alpha\ ;\quad \Box\alpha\in\Sigma\cap F_\varphi\}\subseteq\Gamma\cap F_\varphi$ — Def. $\mathcal{R}_\bigcirc$
Sei nun also $(\bar\Sigma,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$
$\implies \exists n\in\mathbb{N}$*, sodass* $(\bar\Sigma,\bar\Gamma)\in\bar{\mathcal{R}}^n_\bigcirc$
$\implies \{\Box\alpha\ ;\quad \Box\alpha\in\Sigma\cap F_\varphi\}\subseteq\Gamma\cap F_\varphi$ — (*)
$\implies \{\alpha\ ;\quad \Box\alpha\in\Sigma\cap F_\varphi\}\subseteq\Gamma\cap F_\varphi\subseteq\Gamma$ — Bem. 4.1

$\ddot\smile$

6.4 Cluster

Durch Filtration können wir also unser Ziel erreichen und haben mit $\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$ und $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$ zwei Relationen zu $\bigcirc$ bzw. $\Box$, sodass die Eine tatsächlich der reflexiv-transitive Abschluss der

Anderen ist. Unglücklicherweise haben wir durch die Filtration auch etwas verloren: $\bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$ ist nicht mehr funktional und erzwingt nicht eindeutig eine Folge in S_{F_φ}. Genau das aber brauchen wir um zu einem Modell für PLTL zu kommen. Wir sind also noch nicht am Ziel und müssen diesen Mangel irgendwie beheben.

Lemma 6.13 *Sei $\bigcirc\alpha \in F_\varphi$ und $\Sigma \in S_\varphi$ beliebig, dann sind folgende Punkte äquivalent:*

- $\bigcirc\alpha \in \Sigma$
- $\forall\Gamma \in S_\varphi \quad (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \Gamma$
- $\exists\Gamma \in S_\varphi \quad (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$ *und* $\alpha \in \Gamma$

Beweis

(1) ⇒ (2) wegen F2 für $\bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$
(2) ⇒ (3): $\mathcal{R}_{\bigcirc}$ ist seriell (Kor. 6.6), wegen F1 ist daher auch $\bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$ seriell, also gilt die Folgerung.
(3) ⇒ (1): Sei also Γ gegeben, sodass $(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$ und $\alpha \in \Gamma \cap F_\varphi$
$(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc} \stackrel{Def\ \bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}}{\Longrightarrow} \exists\Sigma' \in \bar{\Sigma},\ \exists\Gamma' \in \bar{\Gamma}$, *sodass* $(\Sigma', \Gamma') \in \mathcal{R}_{\bigcirc}$
$\stackrel{\alpha \in \Gamma',\ Def\ \mathcal{R}_{\bigcirc}}{\Longrightarrow} \bigcirc\alpha \in \Sigma' \stackrel{\Sigma' \sim \Sigma}{\Longrightarrow} \bigcirc\alpha \in \Sigma$

☺

Das Lemma zeigt, auch wenn es keinen eindeutigen $\bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$-Nachfolger gibt, so gibt es mindestens einen und falls es mehrere sind, so verhalten sie sich alle «vernünftig». Dies gibt uns die Möglichkeit nach einem $\bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$-Pfad durch alle Elemente von S_{F_φ} zu suchen. Dazu definieren wir so genannte *Cluster* in S_{F_φ}.

Definition 6.14 (Cluster) *Für eine beliebige zweistellige transitive Relation R auf einer Menge M definieren wir folgende Äquivalenzrelation:*

$$\forall a, b \in M \quad a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad a = b \text{ oder } ((a,b) \in R \text{ und } (b,a) \in R)$$

Die Cluster *bezeichnen die Äquivalenzklassen. Ein Cluster zu einem Element $a \in M$ bezeichnen wir mit C_a*

$$C_a := \{b \in M\ ; \quad a \sim b\}$$

(M, R) besteht dann aus einer Menge von Clustern, die sich folgendermassen ordnen lässt:

$$\begin{array}{rcl} C_a \leq C_b & :\Longleftrightarrow & (a,b) \in R \\ C_a < C_b & :\Longleftrightarrow & C_a \leq C_b \text{ und } C_a \neq C_b \\ & \Longleftrightarrow & (a,b) \in R \text{ und } (b,a) \notin R \end{array}$$

Die Definition von $\sim$ sorgt direkt für Reflexivität und Symmetrie; Transitivität folgt schliesslich aus der Transitivität von R. Ist die Menge M endlich, so gibt es selbstverständlich auch nur endlich viele Cluster und somit einen ersten und einen letzten Cluster.

Nun wenden wir all dies auf $(S_{F_\varphi}, \bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc})$ an und können folglich S_{F_φ} als geordnete Menge von $\bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc}$-Clustern auffassen, mit einem ausgezeichneten letzten Cluster C^*_{last}. Ein Cluster C zeichnet sich dadurch aus, dass je zwei verschiedene Elemente $\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma} \in C$ durch endlich viele $\bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$-Schritte verbunden sind. Wir müssen also nur die Cluster der Reihe nach in geeigneter Form *abwickeln*, um eine eindeutige Folge in S_{F_φ} zu definieren. Dabei müssen wir im Auge behalten, dass wir diese Folge als Gegenmodell für φ brauchen und man sollte daher vorsichtig zu Werke gehen. Aus diesem Grund führen wir eine weitere Relation ein:

$$(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}^c_{\Box} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \Sigma' \in \bar{\Sigma}\ \exists \Gamma' \in \bar{\Gamma}, \text{ sodass } (\Sigma', \Gamma') \in \mathcal{R}_{\Box}$$

Diese Relation ist in allen F_φ-Filtrationen von $\mathcal{R}_{\Box}$ enthalten:

Korollar 6.15 *Sei $\bar{\mathcal{R}}_{\Box}$ eine beliebige F_φ-Filtration von $\mathcal{R}_{\Box}$, dann gilt*

$$\forall \Sigma, \Gamma \in S_\varphi \quad (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}^c_{\Box} \quad \Longrightarrow \quad (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}_{\Box}$$

Beweis

$$\begin{aligned} &(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}^c_{\Box} \quad \overset{Def}{\Longrightarrow} \quad \forall \Sigma' \in \bar{\Sigma}\ \exists \Gamma' \in \bar{\Gamma}, \textit{ sodass } (\Sigma', \Gamma') \in \mathcal{R}_{\Box} \\ &\overset{F1}{\Longrightarrow} \quad \forall \Sigma' \in \bar{\Sigma}\ \exists \Gamma' \in \bar{\Gamma}, \textit{ sodass } (\bar{\Sigma}', \bar{\Gamma}') \in \bar{\mathcal{R}}_{\Box} \overset{\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}', \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}'}{\Longrightarrow} (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}_{\Box} \end{aligned}$$

$\ddot\smile$

Da $\bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc}$ ebenfalls eine F_φ-Filtration von $\mathcal{R}_{\Box}$ ist, gilt also $\bar{\mathcal{R}}^c_{\Box} \subseteq \bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc}$. Bilden wir $\bar{\mathcal{R}}^c_{\Box}$-Cluster in S_{F_φ} in derselben Art wie für $\bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc}$, so ist der $\bar{\mathcal{R}}^c_{\Box}$-Cluster eines Elementes im $\bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc}$-Cluster desselben Elementes enthalten. Ein $\bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc}$-Cluster enthält also (eventuell mehrere) $\bar{\mathcal{R}}^c_{\Box}$-Cluster. Im Folgenden schreiben wir C^* für $\bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc}$- Cluster, während mit einem normalen C $\bar{\mathcal{R}}^c_{\Box}$-Cluster gemeint sind. Das folgende Lemma ist der Grund, warum wir auf $\bar{\mathcal{R}}^c_{\Box}$ zurückgreifen müssen.

Lemma 6.16 *Seien $\Sigma \in S_\varphi$ und die Formel α beliebig, sodass $C^*_{\bar{\Sigma}} \neq C^*_{last}$, $\Box\alpha \in F_\varphi$ und $\Box\alpha \notin \Sigma$ gilt, dann ist entweder $\alpha \notin \Sigma$ oder es gibt ein $\Gamma \in S_\varphi$, sodass $\alpha \notin \Gamma$ und $C_{\bar{\Sigma}} < C_{\bar{\Gamma}}$ gilt.*

Beweis

Für diesen Beweis brauchen wir folgendes PLTL-Theorem, dessen Herleitung im Anhang nachzusehen ist.

T9 $\vdash \Box(\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \alpha) \to \Diamond\Box\alpha \to \Box\alpha$

Sei $\Box\alpha \in F_\varphi$, $\Box\alpha \notin \Sigma$ *und* $\alpha \in \Sigma$, *dann unterscheiden wir zwei Fälle:*
1. Fall: $\Diamond\Box\alpha \in \Sigma$

$$\begin{array}{lll}
\Longrightarrow & \Box(\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \alpha) \notin \Sigma & \textit{Kor. 6.2, T9, } \Box\alpha \notin \Sigma \\
\Longrightarrow & \exists\Gamma \in S_\varphi, \textit{ sodass } (\Sigma,\Gamma) \in \mathcal{R}_\Box \textit{ und } \Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \alpha \notin \Gamma & \textit{Kor. 6.7} \\
\Longrightarrow & \exists\Gamma \in S_\varphi, \textit{ sodass } (\Sigma,\Gamma) \in \mathcal{R}_\Box, \Box(\alpha \to \Box\alpha) \in \Gamma \textit{ und } \alpha \notin \Gamma & \textit{Def. MCS, Kor. 6.2}
\end{array}$$

Bleibt zu zeigen, dass $C_{\bar\Sigma} < C_{\bar\Gamma}$*:*
Aus der Voraussetzung folgt: $\forall\Sigma' \in \bar\Sigma \quad (\Box\alpha \notin \Sigma' \textit{ und } \alpha \in \Sigma')$

$$\begin{array}{lll}
\Longrightarrow & \forall\Sigma' \in \bar\Sigma \quad \alpha \to \Box\alpha \notin \Sigma' & \textit{Kor. 6.2} \\
\Longrightarrow & \forall\Sigma' \in \bar\Sigma \quad (\Gamma,\Sigma') \notin \mathcal{R}_\Box & \textit{Def. } \mathcal{R}_\Box, \Box(\alpha \to \Box\alpha) \in \Gamma \\
\Longrightarrow & \forall\Sigma' \in \bar\Sigma \quad (\Sigma',\Gamma) \in \mathcal{R}_\Box & \textit{L. 6.8} \\
\Longrightarrow & (\bar\Sigma,\bar\Gamma) \in \bar{\mathcal{R}}^c_\Box \textit{ und } (\bar\Gamma,\bar\Sigma) \notin \bar{\mathcal{R}}^c_\Box & \textit{Def. } \bar{\mathcal{R}}^c_\Box \\
\Longrightarrow & C_{\bar\Sigma} < C_{\bar\Gamma} & \textit{Def.} <
\end{array}$$

2. Fall: $\Diamond\Box\alpha \notin \Sigma$
Da $C^*_{\bar\Sigma} < C^*_{last}$ *gilt, gibt es ein* $\Delta \in S_\varphi$, *sodass* $C^*_{\bar\Sigma} < C^*_{\bar\Delta}$

$$\begin{array}{lll}
\Longrightarrow & (\bar\Delta,\bar\Sigma) \notin \bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc & \textit{Def.} < \\
\Longrightarrow & (\Delta,\Sigma) \notin \mathcal{R}_\Box & \textit{F1 für } \bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc \\
\Longrightarrow & (\Sigma,\Delta) \in \mathcal{R}_\Box & \textit{L. 6.8} \\
\Longrightarrow & \neg\Box\alpha \in \Delta & \textit{Def. } \mathcal{R}_\Box, \Box\neg\Box\alpha \in \Sigma \\
\Longrightarrow & \Box\alpha \notin \Delta & \textit{Def. MCS} \\
\Longrightarrow & \exists\Gamma \in S_\varphi, \textit{ sodass } (\Delta,\Gamma) \in \mathcal{R}_\Box \textit{ und } \alpha \notin \Gamma & \textit{Kor. 6.7} \\
\Longrightarrow & (\bar\Delta,\bar\Gamma) \in \bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc & \textit{F1} \\
\Longrightarrow & C^*_{\bar\Sigma} < C^*_{\bar\Delta} \leq C^*_{\bar\Gamma} \textit{ und } \alpha \notin \Gamma & \textit{Def.} \leq \\
\Longrightarrow & C_{\bar\Sigma} < C_{\bar\Gamma} \textit{ und } \alpha \notin \Gamma & \bar{\mathcal{R}}^c_\Box \subseteq \bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc
\end{array}$$

$\ddot\smile$

6.5 Konstruktion einer Folge

S_{F_φ} lässt sich also in eine Anzahl $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$-Cluster aufteilen und ordnen, welche ihrerseits in eine Anzahl von $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Clustern aufgeteilt und geordnet werden können. Also können wir S_{F_φ} folgendermassen beschreiben:

$$\begin{aligned}
S_{F_\varphi} &= \underbrace{C_{11} \cup \ldots \cup C_{1m_1}}_{C^*_1} \cup \underbrace{C_{21} \cup \ldots \cup C_{2m_2}}_{C^*_2} \cup \ldots \cup \underbrace{C_{n1} \cup \ldots \cup C_{nm_n}}_{C^*_n = C^*_{last}} \\
&= \underbrace{C_{11} \cup \ldots \cup C_{1m_1}}_{C^*_1} \cup \ldots \cup \underbrace{C_{n-1\,1} \cup \ldots \cup C_{n-1\,m_{n-1}}}_{C^*_{n-1}} \cup C^*_{last}
\end{aligned}$$

Dabei nehmen wir zur Vereinfachung an, dass Cluster die links stehen kleiner sind, als Cluster die weiter rechts stehen, damit wir am Index gleich die Ordnung ablesen können (die erste Stelle für $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$-, die zweite für $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster). Die zweite Zeile beschreibt das Auflisten aller $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster, bis auf jene die zu C^*_{last} gehören. In diesem letzten Cluster interessieren uns die einzelnen $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster nicht mehr, wie wir gleich sehen werden.

Wir bestimmen jetzt ganz willkürlich für alle $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster $C_{11}, \dots, C_{n-1\,m_{n-1}}$ je ein beliebiges Element $\bar{\Delta}_{ij} \in C_{ij}$, sowie ein beliebiges Element $\bar{\Delta}^*_n \in C^*_{last}$ und halten folgende Tatsachen fest:

- Es gibt einen $\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$-Pfad beginnend bei $\bar{\Delta}_{ij}$, der jedes Element aus C_{ij} mindestens einmal trifft und wieder bei $\bar{\Delta}_{ij}$ endet. Es spielt dabei keine Rolle, wenn der Pfad zwischendurch C_{ij} verlässt, er bleibt aber stets in C^*_i
- Von $\bar{\Delta}_{ij}$ gibt es einen $\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$-Pfad zu $\bar{\Delta}_{i\,j+1}$, falls $j < m_i$. Es gibt also eine Verbindung von einem $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster zum Nächsten innerhalb eines $\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$-Clusters C^*_i
- Von $\bar{\Delta}_{im_i}$ gibt es einen $\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$-Pfad zu $\bar{\Delta}_{i+1\,1}$, falls $i < n-1$. Es gibt also eine Verbindung vom letzten $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster in C^*_i zum ersten $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster in C^*_{i+1}
- Von $\bar{\Delta}_{n-1\,m_{n-1}}$ gibt es einen $\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$-Pfad zu $\bar{\Delta}^*_n$. Es gibt also eine Verbindung vom letzten $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster in C^*_{n-1} zu C^*_{last}
- In C^*_{last} gibt es einen $\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$-Pfad, der bei $\bar{\Delta}^*_n$ sowohl beginnt als auch endet und dazwischen alle anderen Elemente von C^*_{last} trifft

Die ersten beiden und der letzte Punkt folgen aus der Tatsache, dass innerhalb eines $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$-Clusters C^*_i für beliebige Elemente $\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma} \quad (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$ gilt. Die übrigen beiden Punkte folgen aus der Linearität von $(S_{F_\varphi}, \bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc)$, welche seinerseits wegen F1 eine Konsequenz aus der Linearität von $(S_\varphi, \mathcal{R}_\Box)$ ist.
Nun konstruieren wir eine Folge $\sigma := \sigma_0, \sigma_1, \dots$ wie folgt:

$$\bar{\Delta}_{11} = \sigma_0, \dots, \sigma_k = \bar{\Delta}_{11} \quad (k \geq 0)$$

gemäss dem ersten Punkt, dann führt mit Punkt zwei ein Pfad weiter zu $\bar{\Delta}_{12}$.

$$\bar{\Delta}_{11} = \sigma_k, \dots, \sigma_l = \bar{\Delta}_{12} \quad (l \geq k)$$

Auf diese Weise wickeln wir alle $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster innerhalb C^*_1 ab, bis der Pfad schliesslich bei $\bar{\Delta}_{1m_1}$ ankommt.

$$\bar{\Delta}_{12} = \sigma_l, \dots, \sigma_p = \bar{\Delta}_{1m_1} \quad (p \geq l)$$

Gemäss Punkt drei, gibt es nun einen Pfad zu $\bar{\Delta}_{21}$ im nächsten $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$-Cluster.

$$\bar{\Delta}_{1m_1} = \sigma_p, \dots, \sigma_q = \bar{\Delta}_{21} \quad (q \geq p)$$

Auf diese Weise wickeln wir alle $\bar{\mathcal{R}}^c_\Box$-Cluster in allen $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$-Clustern mit Ausnahme von C^*_{last} ab und befinden uns dann bei $\bar{\Delta}_{n-1\,m_{n-1}}$.

$$\bar{\Delta}_{21} = \sigma_q, \dots, \sigma_r = \bar{\Delta}_{n-1\,m_{n-1}} \quad (r \geq q)$$

Gemäss dem vierten Punkt führt ein Pfad weiter zu $\bar{\Delta}^*_n$.

$$\bar{\Delta}_{n-1\,m_{n-1}} = \sigma_r, \dots, \sigma_s = \bar{\Delta}^*_n \quad (s \geq r)$$

Jetzt wird C^*_{last} abgewickelt gemäss Punkt fünf.

$$\bar{\Delta}^*_n = \sigma_s, \ldots, \sigma_t = \bar{\Delta}^*_n \quad (t \geq s)$$

Dieser letzte Schritt wird dann einfach endlos wiederholt.

$$\bar{\Delta}^*_n = \sigma_t, \ldots, \sigma_{2t-s} = \bar{\Delta}^*_n, \ldots, \sigma_{3t-2s} = \bar{\Delta}^*_n, \ldots, \ldots, \sigma_{(i+1)t-is} = \bar{\Delta}^*_n, \ldots \quad (i \in \mathbb{N})$$

Die auf diese Weise konstruierte Folge σ bildet jetzt zusammen mit der natürlichen Interpretation $\pi_\varphi : \Phi \to \wp(S_{F_\varphi})$

$$\pi_\varphi(p) := \{\bar{\Sigma}\ ; \quad p \in \Sigma \cap F_\varphi\}$$

ein Gegenmodell für φ, was Konsequenz aus dem nächsten Theorem sein wird. Halten wir aber zuerst einmal fest, was σ für Eigenschaften hat:

Bemerkung 6.17 *Sei $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \ldots$ die eben beschriebene Folge, dann gilt:*

i: $\forall i \in \mathbb{N} \quad (\sigma_i, \sigma_{i+1}) \in \bar{\mathcal{R}}_{\bigcirc}$

ii: $\forall i, k \in \mathbb{N} \quad k \geq i \quad \Longrightarrow \quad (\sigma_i, \sigma_k) \in \bar{\mathcal{R}}^*_{\bigcirc}$

iii: $C_{\sigma_i} < C_{\bar{\Gamma}} \quad \Longrightarrow \quad \exists k > i,$ *sodass* $\sigma_k = \bar{\Gamma}$

iv: $C^*_{\sigma_i} = C^*_{\bar{\Gamma}} = C^*_{last} \quad \Longrightarrow \quad \exists k > i,$ *sodass* $\sigma_k = \bar{\Gamma}$

6.6 Vollständigkeit

Um die Sache etwas übersichtlich zu gestalten, nehmen wir eine beliebige Folge $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ als Repräsentanten der Äquivalenzklassen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ Mit anderen Worten, folgende Bedingung sei erfüllt:

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \bar{\Sigma}_i = \sigma_i$$

Ausserdem schreiben wir $\sigma_i \models \alpha$, anstatt $(\sigma, \pi_\varphi), i \models \alpha$.

Theorem 6.18 *Für beliebige $\alpha \in F_\varphi$ gilt:*

$$\sigma_i \models \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \Sigma_i$$

Beweis

Wir beweisen dieses Theorem induktiv gemäss der Definition von Formeln:

$\alpha \equiv p \in \Phi$*:*

$\sigma_i \models p \quad \overset{Def \models}{\Longleftrightarrow} \quad \sigma_i \in \pi_\varphi(p) \quad \overset{Def\ \pi_\varphi}{\Longleftrightarrow} \quad p \in \Sigma_i$

$\alpha \equiv \neg\beta$*:*

$\sigma_i \models \neg\beta \quad \overset{Def \models}{\Longleftrightarrow} \quad \sigma_i \not\models \beta \quad \overset{IV}{\Longleftrightarrow} \quad \beta \notin \Sigma_i \quad \overset{Def\ MCS}{\Longleftrightarrow} \quad \neg\beta \in \Sigma_i$

$\alpha \equiv \beta \vee \gamma$*:*

$\sigma_i \models \beta \vee \gamma \quad \overset{Def \models}{\Longleftrightarrow} \quad \sigma_i \models \beta$ *oder* $\sigma_i \models \gamma \quad \overset{IV}{\Longleftrightarrow} \quad \beta \in \Sigma_i$ *oder* $\gamma \in \Sigma_i$

$\overset{Kor\ 6.2}{\iff} \quad \beta \vee \gamma \in \Sigma_i$

$\alpha \equiv \bigcirc\beta$:

$\sigma_i \models \bigcirc\beta \quad \overset{Def \models}{\iff} \quad \sigma_{i+1} \models \beta \quad \overset{IV}{\iff} \quad \beta \in \Sigma_{i+1} \quad \overset{L\ 6.13}{\iff} \quad \bigcirc\beta \in \Sigma_i$

$\alpha \equiv \Box\beta$:

$\ll\Rightarrow\gg$: Sei $\Box\beta \notin \Sigma_i$

1. Fall: $\sigma_i \notin C^*_{last}$

$\Box\beta \notin \Sigma_i$	$\Longrightarrow$	$\beta \notin \Sigma_i$ *oder* $\exists\Gamma \in S_\varphi$, *sodass* $C_{\bar{\Sigma}_i} < C_{\bar{\Gamma}}$ *und* $\beta \notin \Gamma$	*L. 6.16*
	$\Longrightarrow$	$\exists k \geq i$, *sodass* $\bar{\Gamma} = \sigma_k$ *und* $\beta \notin \Gamma$	*Bem. 6.17 iii*
	$\Longrightarrow$	$\exists k \geq i$, *sodass* $\sigma_k \not\models \beta$	*IV*
	$\Longrightarrow$	$\sigma_i \not\models \Box\beta$	*Def.* $\models$

2. Fall: $\sigma_i \in C^*_{last}$

$\Box\beta \notin \Sigma_i$	$\Longrightarrow$	$\exists\Gamma \in S_\varphi$, *sodass* $(\Sigma_i, \Gamma) \in \mathcal{R}_\Box$ *und* $\beta \notin \Gamma$	*Kor. 6.7*
	$\Longrightarrow$	$(\bar{\Sigma}_i, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$ *und* $\beta \notin \Gamma$	*F1 für* $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$
	$\Longrightarrow$	$\exists k \geq i$, *sodass* $\bar{\Gamma} = \sigma_k$ *und* $\beta \notin \Gamma$	*Bem. 6.17 iv*
	$\Longrightarrow$	$\exists k \geq i$. *sodass* $\sigma_k \not\models \beta$	*IV*
	$\Longrightarrow$	$\sigma_i \not\models \Box\beta$	*Def.* $\models$

$\ll\Leftarrow\gg$:

$\Box\beta \in \Sigma_i$	$\Longrightarrow$	$\forall k \geq i \quad \beta \in \Sigma_k$	*Bem. 6.17 ii, F2 für* $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$
	$\Longrightarrow$	$\forall k \geq i \quad \sigma_k \models \beta$	*IV*
	$\Longrightarrow$	$\sigma_i \models \Box\beta$	*Def.* $\models$

$\alpha \equiv \beta\,\mathcal{U}\,\gamma$:

$\ll\Rightarrow\gg$:

$\sigma_i \models \beta\,\mathcal{U}\,\gamma \quad \overset{Def \models}{\Longrightarrow} \quad \exists k \geq i$, *sodass* $\sigma_k \models \gamma$ *und* $\forall j,\ i \leq j < k,\ \sigma_j \models \beta$

$\overset{IV}{\Longrightarrow} \quad \exists k \geq i$, *sodass* $\gamma \in \Sigma_k$ *und* $\forall j,\ i \leq j < k,\ \beta \in \Sigma_j$

Sei k' *das kleinste solche* k, *dann gilt* $\forall j,\ i \leq j < k',\ \sigma_j \not\models \gamma$.

Wir beweisen mit Induktion nach j: $\forall j \quad i \leq j \leq k' \quad \Longrightarrow \quad \beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_j$

> $j = k'$: $\gamma \in \Sigma_{k'} \quad \overset{A5}{\Longrightarrow} \quad \beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_{k'}$
>
> $j \to j-1$: *nach IV gilt:* $i < j \leq k' \quad \Longrightarrow \quad \beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_j$
>
> *Aus der Definition von* F_φ *wissen wir:* $\bigcirc(\beta\,\mathcal{U}\,\gamma) \in F_\varphi$
>
> $\overset{L\ 6.13}{\Longrightarrow} \quad \bigcirc(\beta\,\mathcal{U}\,\gamma) \in \Sigma_{j-1} \overset{\beta \in \Sigma_{j-1},\ A5}{\Longrightarrow} \beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_{j-1}$

Also gilt insbesondere $\beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_i$

$\ll\Leftarrow\gg$:

$\beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_i \quad \overset{A6}{\Longrightarrow} \quad \Diamond\gamma \in \Sigma_i \overset{Def\ MCS}{\Longrightarrow} \Box\neg\gamma \notin \Sigma_i \quad \overset{IV}{\Longrightarrow} \quad \sigma_i \not\models \Box\neg\gamma$

$\overset{Def \models}{\Longrightarrow} \quad \exists k \geq i$, *sodass* $\sigma_k \models \gamma$

Sei k' *das kleinste solche* k, *dann beweisen wir mit Induktion nach* j:

$\forall j \quad i \leq j < k' \quad \Longrightarrow \quad \beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_j$

> $j = i$: *nach Voraussetzung*
>
> $j \to j+1$: *nach IV gilt:* $i \leq j < k'-1 \quad \Longrightarrow \quad \beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_j$
>
> *So wie* k' *gewählt ist, gilt ausserdem:* $\sigma_j \not\models \gamma$
>
> $\overset{(globale)\ IV}{\Longrightarrow} \gamma \notin \Sigma_j$ *und* $\beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_j \quad \overset{A5}{\Longrightarrow} \quad \bigcirc(\beta\,\mathcal{U}\,\gamma) \in \Sigma_j \quad \overset{L\ 6.13}{\Longrightarrow} \quad \beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_{j+1}$

Somit erhalten wir: $\forall j \quad (i \leq j < k' \quad \Longrightarrow \quad \beta\,\mathcal{U}\,\gamma \in \Sigma_j$ *und* $\gamma \notin \Sigma_j)$

$$\overset{mit\ A5}{\Longrightarrow} \quad \forall j,\ i \leq j < k',\ \beta \in \Sigma_j \quad \overset{IV}{\Longrightarrow} \quad \forall j,\ i \leq j < k',\ \sigma_j \models \beta \quad \overset{Def \models}{\Longrightarrow} \quad \sigma_i \models \beta\,\mathcal{U}\,\gamma$$

☺

Nun haben wir unser Gegenmodell für unsere nicht-herleitbare Formel φ und folgendes Theorem lässt sich formulieren:

Theorem 6.19

$$\nvdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \nvDash \varphi$$

Beweis

Da φ nicht herleitbar ist, gibt es nach L. 6.3 ein $\Sigma \in MCS$, sodass $\varphi \notin \Sigma$ ist. Mit so einem Σ erzeugen wir $S_\varphi \subseteq MCS$ als die kleinste Menge, die Σ enthält und unter $\mathcal{R}_\Box$ abgeschlossen ist. Durch Filtration mit F_φ erhalten wir S_{F_φ} (mit $\bar{\Sigma}$ als Element) und wir haben zwei Relationen $\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$ und $\bar{\mathcal{R}}^*_\bigcirc$ als Filtrationen von $\mathcal{R}_\bigcirc$ bzw. $\mathcal{R}_\Box$. Es gibt eine $\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$-Folge $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \ldots$ durch S_{F_φ}, die jedes Element (auch $\bar{\Sigma}$) mindestens einmal trifft, so gilt also $\bar{\Sigma} = \sigma_k = \bar{\Sigma}_k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$. Da sich nun aber Σ und Σ_k bezüglich den Formeln aus der Filtermenge F_φ nicht unterscheiden ($\Sigma \sim \Sigma_k$), folgt $\varphi \notin \Sigma_k$ und mit Th. 6.18 $\sigma_k \nvDash \varphi$ und daher auch $\nvDash \varphi$.

☺

Dies ist also ein weiterer Beweis für die Vollständigkeit des Beweissystems aus Kapitel 4, alternativ zu jenem der im selben Kapitel geführt wurde. Jener Beweis bestand daraus, aus dem Ablauf des Algorithmus, der mit Hilfe des Tableaus Gültigkeit für φ testen kann, eine Herleitung für φ zu konstruieren und ist insbesondere konstruktiv.

Die jetzige Version hingegen konstruiert ein Gegenmodell für eine nicht herleitbare Formel, beweist damit die Kontraposition und ist nicht konstruktiv. Die Konstruktion des Gegenmodells erinnert eher an die Tableau-Konstruktion, welche ein Modell für eine erfüllbare Formel φ konstruiert, welches aber natürlich gleichzeitig ein Gegenmodell für die nicht-gültige Formel $\neg\varphi$ ist.

6.7 Kanonisches Modell und Tableau

Vergleichen wir mal die beiden Modell-Konstruktionen, so fallen einige Gemeinsamkeiten auf. Bei beiden Konstruktionen spielen maximal konsistente Mengen eine Rolle. Man verwendet je eine unter Subformeln abgeschlossene Formelmenge und bildet damit eine endliche Basismenge. Folgende Tabelle listet die einander entsprechenden Bestandteile der Modell-Konstruktionen auf:

Kanonisches Modell	Tableau
Filtermenge F_φ	$cl(\varphi)$ Abschluss von φ
S_{F_φ}	$\mathcal{A}_\varphi$
$\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}$	A, B Atome
$\bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$	$\mathcal{R}_\varphi$
σ	$\sigma_{\mathcal{A}_\varphi}$ erfüllender Pfad

Unterschiede gibt es natürlich auch: $cl(\varphi)$ ist unter Negation abgeschlossen, F_φ hingegen nicht; $\mathcal{A}_\varphi$ besteht aus Atomen, welche endliche Formelmengen sind, während die Elemente von S_{F_φ} Äquivalenzklassen von unendlichen Formelmengen sind. Das sind allerdings nur vermeintliche Unterschiede, die sich relativ leicht erklären lassen.

Im Beweis von Lemma 6.11 machten wir von folgender Menge Gebrauch:

$$F_\varphi^C := F_\varphi \cup \{\neg\alpha \,; \quad \alpha \in F_\varphi\}$$

Wie bei $cl(\varphi)$ können wir vereinbaren, dass F_φ^C keine doppelt negierten Formeln enthalten soll. Eigentlich ist es diese Menge, die in der Gegenüberstellung zu $cl(\varphi)$ passt und nicht unbedingt F_φ und es gilt $cl(\varphi) \subseteq F_\varphi^C$.

Nun können wir jede Äquivalenzklasse $\bar{\Sigma} \in S_{F_\varphi}$ mit einer (maximal konsistenten) Teilmenge von F_φ^C identifizieren, nämlich mit $\Sigma \cap F_\varphi^C$. Man kann dabei einen beliebigen Vertreter aus $\bar{\Sigma}$ wählen, denn der Durchschnitt mit F_φ^C ergibt ja für alle dieselbe Menge. Diese Mengen spielen im kanonischen Modell die Rolle der Atome im Tableau, dabei besteht folgender Zusammenhang:

Korollar 6.20

$$\forall \bar{\Sigma} \in S_{F_\varphi} \quad \Sigma \cap cl(\varphi) \textit{ ist ein Atom}$$

Beweis

Sei $\Sigma \in S_\varphi$ beliebig. Wir zeigen, dass $\Sigma \cap cl(\varphi)$ die sechs Bedingungen für Atome erfüllt:

$\Sigma \in MCS \overset{\text{Def 6.1}}{\Longrightarrow} \Sigma \cap cl(\varphi) \nvdash \bot \overset{\text{Kor 6.2}}{\Longrightarrow} \bot \notin \Sigma \cap cl(\varphi)$

Für beliebige $\alpha \in cl(\varphi)$: $\alpha \in \Sigma \cap cl(\varphi) \overset{\text{Def 6.1}}{\Longleftrightarrow} \neg\alpha \notin \Sigma \cap cl(\varphi)$

Für beliebige $\alpha \vee \beta \in cl(\varphi)$: $\alpha \vee \beta \in \Sigma \cap cl(\varphi) \overset{\text{Kor 6.2}}{\Longleftrightarrow} \alpha \in \Sigma \cap cl(\varphi)$ oder $\beta \in \Sigma \cap cl(\varphi)$

Für beliebige $\alpha \mathcal{U} \beta \in cl(\varphi)$: $\alpha \mathcal{U} \beta \in \Sigma \cap cl(\varphi) \overset{A5}{\Longrightarrow} \Sigma \vdash \alpha \vee \beta$

$\overset{\text{Kor 6.2}}{\Longrightarrow} \alpha \vee \beta \in \Sigma \overset{\text{Kor 6.2, } \alpha, \beta \in cl(\varphi)}{\Longrightarrow} \alpha \in \Sigma \cap cl(\varphi)$ *oder* $\beta \in \Sigma \cap cl(\varphi)$

Für beliebige $\alpha \mathcal{U} \beta \in cl(\varphi)$: $\beta \in \Sigma \cap cl(\varphi) \overset{A5}{\Longrightarrow} \Sigma \cap cl(\varphi) \vdash \alpha \mathcal{U} \beta$

$\overset{\text{Kor 6.2}}{\Longrightarrow} \alpha \mathcal{U} \beta \in \Sigma \cap cl(\varphi)$

Also ist $\Sigma \cap cl(\varphi)$ ein Atom.

$\ddot\smile$

Die wesentlichen Unterschiede bestehen darin, dass $cl(\varphi)$ eine echte Teilmenge von F_φ^C sein kann. Im Gegensatz zu $cl(\varphi)$, das lediglich unter einfacher Negation und unter Subformeln abgeschlossen ist, hat F_φ^C noch weitere Abschlusseigenschaften (vgl. Def. 6.9). Das heisst die Tableau-Konstruktion kommt mit weniger «Basismaterial» aus, als die Konstruktion des kanonischen Modells.

Der andere wesentliche Unterschied betrifft den Umstand, dass die Konstruktion des Tableaus vollständig auf der semantischen Seite geschieht. Man konstruiert ein Gegenmodell für eine nicht-*gültige* Formel, während das kanonische Modell ein Gegenmodell für eine nicht-*herleitbare* Formel konstruiert und somit von einem Beweissystem ausgeht. Erst mit einem Vollständigkeitsbeweis wissen wir von der Äquivalenz des semantischen Begriffs *gültig* mit dem syntaktischen Begriff *herleitbar*.

Wir haben mit dem Korollar gesehen, dass wir jedem Element von S_{F_φ} ein Atom aus $\mathcal{A}_\varphi$ zuordnen können, und zwar mit folgender Funktion $f : S_{F_\varphi} \to \mathcal{A}_\varphi$

$$f(\bar{\Sigma}) := \Sigma \cap cl(\varphi)$$

Es ist offensichtlich, dass f eine surjektive Abbildung ist und das nächste Korollar zeigt, dass f einen Homomorphismus von $(S_{F_\varphi}, \bar{\mathcal{R}}_\bigcirc)$ nach $(\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$ beschreibt.

Korollar 6.21

$$(\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \in \bar{\mathcal{R}}_\bigcirc \quad \Longrightarrow \quad (f(\bar{\Sigma}), f(\bar{\Gamma})) \in \mathcal{R}_\varphi$$

Beweis

Sei $(f(\bar{\Sigma}), f(\bar{\Gamma})) \notin \mathcal{R}_\varphi$, *dann gibt es vier Möglichkeiten:*
1. Fall: $\exists \bigcirc\alpha \in cl(\varphi)$, *sodass* $\bigcirc\alpha \in \Sigma$ *und* $\alpha \notin \Gamma \overset{L\ 6.13}{\Longrightarrow} (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \notin \bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$
2. Fall: $\exists \bigcirc\alpha \in cl(\varphi)$, *sodass* $\bigcirc\alpha \notin \Sigma$ *und* $\alpha \in \Gamma \overset{L\ 6.13}{\Longrightarrow} (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \notin \bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$
3. Fall: $\exists(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \in cl(\varphi)$, *sodass* $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta, \neg\beta \in \Sigma$ *und* $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \notin \Gamma$
$\overset{A5}{\Longrightarrow} \Sigma \vdash \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \overset{Def\ F_\varphi^C}{\Longrightarrow} \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \in \Sigma \cap F_\varphi^C \overset{L\ 6.13}{\Longrightarrow} (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \notin \bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$
4. Fall: $\exists(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \in cl(\varphi)$, *sodass* $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in \Gamma$ *und* $\alpha \in \Sigma$ *und* $\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \notin \Sigma$
$\overset{A5}{\Longrightarrow} \bigcirc(\alpha\,\mathcal{U}\,\beta) \notin \Sigma \overset{L\ 6.13}{\Longrightarrow} (\bar{\Sigma}, \bar{\Gamma}) \notin \bar{\mathcal{R}}_\bigcirc$

Nun können wir natürlich die Folge σ ins Tableau abbilden und erhalten einen erfüllenden Pfad.

Korollar 6.22

$$f(\sigma) := f(\sigma_0), f(\sigma_1), \ldots \textit{ ist ein erfüllender Pfad in } (\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{R}_\varphi)$$

Beweis

Z.z.: $\forall i \in \mathbb{N} \quad (\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in f(\sigma_i) \implies \exists k \geq i \ \ \beta \in f(\sigma_k))$
$\alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in f(\sigma_i) \overset{\subseteq}{\Longrightarrow} \alpha\,\mathcal{U}\,\beta \in \Sigma_i \overset{Th\ 6.18}{\Longrightarrow} \sigma_i \models \alpha\,\mathcal{U}\,\beta$
$\overset{Def \models}{\Longrightarrow} \exists k \geq i \ \ \sigma_k \models \beta \overset{Th\ 6.18}{\Longrightarrow} \beta \in \Sigma_k \overset{\beta \in cl(\varphi)}{\Longrightarrow} \beta \in \Sigma_k \cap cl(\varphi) = f(\sigma_k)$

Das Tableau ist also ein homomorphes Bild des kanonischen Modells! Die beiden Konstruktionen haben denselben Aufbau, allein, das kanonische Modell ist (i.A.) grösser als das Tableau. Weshalb dieser Unterschied in der Grösse? Gibt es ein kleineres kanonisches Modell? Vielleicht liefert die Ergründung dieser Fragen interessanten Stoff für weiterführende Arbeiten.

A Herleitungen

KS, KP und R1 bis R5 lassen sich mit Hilfe geeigneter Tautologien und MP ableiten:

KS	mit $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$
KP	mit $(\alpha \to \beta) \to \neg\beta \to \neg\alpha$
R1	mit $\beta \to \alpha \to \beta$
R2	mit $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \delta) \to \alpha \lor \beta \to \gamma \lor \delta$
R3	mit $(\alpha \to \beta \lor \gamma) \to (\alpha \to \neg\gamma) \to \alpha \to \beta$
R4	mit $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \lor \beta \to \gamma$
R5	mit $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \land \gamma$

R$\bigcirc$: $\vdash \alpha \to \beta \quad \Longrightarrow \quad \vdash \bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta$

Beweis

1.	$\alpha \to \beta$	*gegeben*
2.	$\bigcirc(\alpha \to \beta)$	*$Gen^{\bigcirc}$ (1)*
3.	$\bigcirc(\alpha \to \beta) \to \bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta$	*A2*
4.	$\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta$	*MP(3,2)*

$\ddot{\smile}$

R$\Box$: analog wie R$\bigcirc$ mit $Gen^{\Box}$ und A3 anstatt $Gen^{\bigcirc}$ und A2.

IND: $\vdash \alpha \to \bigcirc\alpha \quad \Longrightarrow \quad \vdash \alpha \to \Box\alpha$

Beweis

1.	$\alpha \to \bigcirc\alpha$	*gegeben*
2.	$\Box(\alpha \to \bigcirc\alpha)$	*$Gen^{\Box}$ (1)*
3.	$\Box(\alpha \to \bigcirc\alpha) \to \alpha \to \Box\alpha$	*A4*
4.	$\alpha \to \Box\alpha$	*MP(3,2)*

$\ddot{\smile}$

Bem. 4.2: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \vdash \Diamond\alpha \leftrightarrow \alpha \lor \bigcirc\alpha \lor \ldots \lor \bigcirc^n\alpha \lor \bigcirc^{n+1}\Diamond\alpha$

Beweis

Beweis durch Induktion nach n:
$n = 0$*: entspricht Bem. 4.1*
$n \to n+1$*: Sei* $\gamma := \alpha \lor \bigcirc\alpha \lor \ldots \lor \bigcirc^n\alpha$

1.	$\Diamond\alpha \leftrightarrow \gamma \lor \bigcirc^{n+1}\Diamond\alpha$	*IV*
2.	$\Diamond\alpha \leftrightarrow \alpha \lor \bigcirc\Diamond\alpha$	*Verankerung*
3.	$\bigcirc^{n+1}\Diamond\alpha \leftrightarrow \bigcirc^{n+1}(\alpha \lor \bigcirc\Diamond\alpha)$	*R$\bigcirc$(2) (n+1 mal)*
4.	$\bigcirc^{n+1}(\alpha \lor \bigcirc\Diamond\alpha) \leftrightarrow \bigcirc^{n+1}\alpha \lor \bigcirc^{n+2}\Diamond\alpha$	*mit T1*
5.	$\bigcirc^{n+1}\Diamond\alpha \leftrightarrow \bigcirc^{n+1}\alpha \lor \bigcirc^{n+2}\Diamond\alpha$	*KS(3,4)*
6.	$\gamma \lor \bigcirc^{n+1}\Diamond\alpha \leftrightarrow \gamma \lor \bigcirc^{n+1}\alpha \lor \bigcirc^{n+2}\Diamond\alpha$	*R2($\gamma \leftrightarrow \gamma$,5)*
7.	$\Diamond\alpha \leftrightarrow \gamma \lor \bigcirc^{n+1}\alpha \lor \bigcirc^{n+2}\Diamond\alpha$	*KS(1,6)*

$\ddot{\smile}$

R6: $\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$ und $\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \delta) \quad \Longrightarrow \quad \vdash \alpha \to \Box(\beta \to \gamma \wedge \delta)$
Beweis

1.	$\alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$	*gegeben*
2.	$\alpha \to \Box(\beta \to \delta)$	*gegeben*
3.	$\alpha \to \Box(\beta \to \gamma) \wedge \Box(\beta \to \delta)$	*R5(1,2)*
4.	$\alpha \to \Box((\beta \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta))$	*KS(3,T4)*
5.	$(\beta \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta) \to \beta \to \gamma \wedge \delta$	*Tautologie*
6.	$\Box((\beta \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta)) \to \Box(\beta \to \gamma \wedge \delta)$	*R$\Box$(5)*
7.	$\alpha \to \Box(\beta \to \gamma \wedge \delta)$	*KS(4,6)*

$\ddot\smile$

R7: $\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$ und $\vdash \gamma \to \delta \quad \Longrightarrow \quad \vdash \alpha \to \Box(\beta \to \delta)$
Beweis

1.	$\alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$	*gegeben*
2.	$\gamma \to \delta$	*gegeben*
3.	$\alpha \to \Box(\gamma \to \delta)$	*R1(Gen$^\Box$(2))*
4.	$\alpha \to \Box(\beta \to \gamma) \wedge \Box(\gamma \to \delta)$	*R5(1,3)*
5.	$\alpha \to \Box((\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \delta))$	*KS(4,T4)*
6.	$(\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \delta) \to \beta \to \delta$	*Tautologie*
7.	$\Box((\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \delta)) \to \Box(\beta \to \delta)$	*R$\Box$(6)*
8.	$\alpha \to \Box(\beta \to \delta)$	*KS(5,7)*

$\ddot\smile$

R8: $\vdash \alpha \to \beta \to \delta$ und $\vdash \alpha \to \gamma \to \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \vdash \alpha \to \beta \vee \gamma \to \delta \vee \epsilon$
Beweis

1.	$\alpha \to \beta \to \delta$	*gegeben*
2.	$\alpha \to \gamma \to \epsilon$	*gegeben*
3.	$(\alpha \to \beta \to \delta) \to (\alpha \to \gamma \to \epsilon) \to \alpha \to \beta \vee \gamma \to \delta \vee \epsilon$	*Tautologie*
4.	$\alpha \to \beta \vee \gamma \to \delta \vee \epsilon$	*MP(MP(3,1),2)*

$\ddot\smile$

R9: $\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$ und $\vdash \beta \to \neg\gamma \quad \Longrightarrow \quad \vdash \alpha \to \Box\neg\beta$
Beweis

1.	$\alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$	*gegeben*
2.	$\beta \to \neg\gamma$	*gegeben*
3.	$\alpha \to \Box(\beta \to \neg\gamma)$	*R1(Gen$^\Box$(2))*
4.	$\alpha \to \Box(\beta \to \gamma) \wedge \Box(\beta \to \neg\gamma)$	*R5(1,3)*
5.	$\alpha \to \Box((\beta \to \gamma) \wedge (\beta \to \neg\gamma))$	*KS(4,T4)*
6.	$(\beta \to \gamma) \wedge (\beta \to \neg\gamma) \to \neg\beta$	*Tautologie*
7.	$\Box((\beta \to \gamma) \wedge (\beta \to \neg\gamma)) \to \Box\neg\beta$	*R$\Box$(7)*
8.	$\alpha \to \Box\neg\beta$	*KS(5,7)*

$\ddot\smile$

R10: $\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \delta)$ und $\vdash \alpha \to \Box(\gamma \to \delta) \quad \Longrightarrow \quad \vdash \alpha \to \Box(\beta \lor \gamma \to \delta)$
Beweis

1.	$\alpha \to \Box(\beta \to \delta)$	*gegeben*
2.	$\alpha \to \Box(\gamma \to \delta)$	*gegeben*
3.	$\alpha \to \Box(\beta \to \delta) \land \Box(\gamma \to \delta)$	*R5(1,2)*
4.	$\alpha \to \Box((\beta \to \delta) \land (\gamma \to \delta))$	*KS(3,T4)*
5.	$(\beta \to \delta) \land (\gamma \to \delta) \to \beta \lor \gamma \to \delta$	*Tautologie*
6.	$\Box((\beta \to \delta) \land (\gamma \to \delta)) \to \Box(\beta \lor \gamma \to \delta)$	*R$\Box$(5)*
7.	$\alpha \to \Box(\beta \lor \gamma \to \delta)$	*KS(4,6)*

$\ddot\smile$

R11: $\vdash \alpha \to \Box(\beta \to \bigcirc\beta) \quad \Longrightarrow \quad \vdash \alpha \to \Box(\beta \to \Box\beta)$
Beweis

1.	$\alpha \to \Box(\beta \to \bigcirc\beta)$	*gegeben*
2.	$\Box(\beta \to \bigcirc\beta) \to \Box\Box(\beta \to \bigcirc\beta)$	*T6*
3.	$\Box\Box(\beta \to \bigcirc\beta) \to \Box(\beta \to \Box\beta)$	*R$\Box$(A4)*
4.	$\alpha \to \Box(\beta \to \Box\beta)$	*KS(KS(1,2),3)*

$\ddot\smile$

R12: $\vdash \alpha \to \Box(\gamma \to \delta)$ und $\vdash \beta \to \gamma \quad \Longrightarrow \quad \vdash \alpha \to \Box(\beta \to \delta)$
Beweis

1.	$\alpha \to \Box(\gamma \to \delta)$	*gegeben*
2.	$\beta \to \gamma$	*gegeben*
3.	$\alpha \to \Box(\beta \to \gamma)$	*R1(Gen$^\Box$(2))*
4.	$\alpha \to \Box(\gamma \to \delta) \land \Box(\beta \to \gamma)$	*R5(1,3)*
5.	$\alpha \to \Box((\gamma \to \delta) \land (\beta \to \gamma))$	*KS(4,T4)*
6.	$(\gamma \to \delta) \land (\beta \to \gamma) \to \beta \to \delta$	*Tautologie*
7.	$\Box((\gamma \to \delta) \land (\beta \to \gamma)) \to \Box(\beta \to \delta)$	*R$\Box$(6)*
8.	$\alpha \to \Box(\beta \to \delta)$	*KS(5,7)*

$\ddot\smile$

T8: $\vdash \Box(\underbrace{\Box\alpha \to \beta}_{P}) \lor \Box(\underbrace{\Box\beta \to \alpha}_{Q}) \equiv \Box P \lor \Box Q$
Beweis

Die Herleitung ist etwas komplex und wir leiten erst mal ein paar Zwischenergebnisse her:

R13 $\vdash \alpha \to \gamma$ *und* $\vdash \beta \to \delta \quad \Longrightarrow \quad \vdash \alpha \land \beta \to \gamma \land \delta$

Folgt aus der Tautologie $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \delta) \to \alpha \land \beta \to \gamma \land \delta$

W1 $\vdash \Box P \lor P \lor \Box Q \lor \neg Q \lor \bigcirc\Box Q$

W2 $\vdash \Box Q \lor Q \lor \Box P \lor \neg P \lor \bigcirc\Box P$

W3 $\vdash \Box P \vee P \vee \Box Q \vee Q$

W1:

1. $(\Box\alpha \to \alpha) \to \Box\alpha \to \Box\beta \to \alpha$ — *Tautologie*
2. $\Box\alpha \to \Box\beta \to \alpha$ — *MP(1, Bem. 4.1)*
3. $\Box\Box\alpha \to \Box(\Box\beta \to \alpha)$ — *R$\Box$(2)*
4. $\Box\alpha \to \bigcirc\Box(\Box\beta \to \alpha)$ — *KS(KS(T6,3), Bem. 4.1)*
5. $\Box\alpha \wedge \neg\beta \to \bigcirc\Box(\Box\beta \to \alpha)$ — *KS($\Box\alpha \wedge \neg\beta \to \Box\alpha$, 4)*
6. $P \vee \bigcirc\Box Q$ — *Def. P,Q*
7. $\Box P \vee P \vee \Box Q \vee \neg Q \vee \bigcirc\Box Q$ — *mit MP und Taut. $\alpha \to \alpha \vee \beta$*

W2 analog W1

W3:

1. $\Box\alpha \to \Box\beta \to \alpha$ — *vgl. 2. Zeile bei W1*
2. $\Box\alpha \wedge \neg\beta \to \Box\beta \to \alpha$ — *KS($\Box\alpha \wedge \neg\beta \to \Box\alpha$, 1)*
3. $P \vee Q$ — *Def. P,Q*
4. $\Box P \vee P \vee \Box Q \vee Q$ — *mit MP und Taut. $\alpha \to \alpha \vee \beta$*

W4 $:\equiv \Box P \vee \neg P \vee \bigcirc\Box P \vee \Box Q \vee \neg Q \vee \bigcirc\Box Q$

Wir beweisen: $\vdash W1 \wedge W2 \wedge W3 \wedge W4 \to T8$ *und brauchen dazu folgende Tautologie:*

AT1 $(\alpha \to \beta \vee \gamma \vee \delta \vee \epsilon) \to \alpha \to (\beta \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \alpha) \vee (\delta \wedge \alpha) \vee (\epsilon \wedge \alpha)$

1. $\Diamond\neg P \to \neg P \vee \bigcirc\Diamond\neg P$ — *Bem. 4.1*
2. $\neg P \vee \bigcirc\Diamond\neg P \to \neg P \vee (\bigcirc\Diamond\neg P \wedge P)$ — *Tautologie*
3. $\Diamond\neg P \to \neg P \vee (\bigcirc\Diamond\neg P \wedge P)$ — *KS(1,2)*
4. $\Diamond\neg Q \to \neg Q \vee (\bigcirc\Diamond\neg Q \wedge Q)$ — *analog 1-3*
5. $\Diamond\neg P \wedge \Diamond\neg Q \to (\neg P \vee (\bigcirc\Diamond\neg P \wedge P)) \wedge (\neg Q \vee (\bigcirc\Diamond\neg Q \wedge Q))$ — *R13(3,4)*
6. $\Diamond\neg P \wedge \Diamond\neg Q \to (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \bigcirc\Diamond\neg Q \wedge Q)$
   $\vee(\bigcirc\Diamond\neg P \wedge P \wedge \neg Q) \vee (\bigcirc\Diamond\neg P \wedge \bigcirc\Diamond\neg Q \wedge Q)$ — *mit KS und de Morgan (Taut.)*
7. $\neg T8 \to \neg W3 \vee \neg W1 \vee \neg W2 \vee \neg W4$ — *MP(AT1,6)*
8. $W1 \wedge W2 \wedge W3 \wedge W4 \to T8$ — *mit KP(7)*

Wir beweisen: $\vdash \bigcirc T8 \to W4$

1. $(\neg \bigcirc \Box P \wedge \neg \bigcirc \Box Q) \vee \underbrace{\Box P \vee \neg P \vee \bigcirc\Box P \vee \Box Q \vee \neg Q \vee \bigcirc\Box Q}_{W4}$ — *Tautologie*
2. $(\bigcirc\Diamond\neg P \wedge \bigcirc\Diamond\neg Q) \vee W4$ — *mit A1*
3. $\bigcirc(\Diamond\neg P \wedge \Diamond\neg Q) \vee W4$ — *mit T2*
4. $\bigcirc(\Box P \vee \Box Q) \to W4$ — *mit A1*

Wir beweisen: $\vdash \Diamond W4$

1. $\Box\Diamond\neg P \to \Diamond\neg P$ — *Bem. 4.1*
2. $\Diamond\Box P \vee \Diamond\neg P$ — *Def. $\to$*
3. $\Diamond\Box P \vee \Diamond\neg P \vee \Diamond \bigcirc \Box P \vee \Diamond\Box Q \vee \Diamond\neg Q \vee \Diamond \bigcirc \Box Q$ — *mit MP und Taut. ($\alpha \to \alpha \vee \beta$)*
4. $\Diamond(\Box P \vee \neg P \vee \bigcirc\Box P \vee \Box Q \vee \neg Q \vee \bigcirc\Box Q)$ — *mit T4*

Nun zur eigentlichen Herleitung von T8:

1.	$W1 \wedge W2 \wedge W3 \wedge W4 \rightarrow T8$	
2.	$W1 \wedge W2 \wedge W3$	
3.	$\bigcirc T8 \rightarrow W4$	
4.	$\Diamond W4$	
5.	$W4 \rightarrow T8$	*von 1 und 2*
6.	$\bigcirc \neg T8 \rightarrow \bigcirc \neg W4$	*R$\bigcirc$(KP(5))*
7.	$\neg \bigcirc T8 \rightarrow \bigcirc \neg W4$	*KS(A1,6)*
8.	$\neg W4 \rightarrow \neg \bigcirc T8$	*KP(3)*
9.	$\neg W4 \rightarrow \bigcirc \neg W4$	*KS(8,7)*
10.	$\neg W4 \rightarrow \Box \neg W4$	*IND(9)*
11.	$\Diamond W4 \rightarrow W4$	*KP(10)*
12.	$W4$	*MP(11,4)*
13.	$T8$	*MP(5,12)*

$\ddot\smile$

T9: $\vdash \Box(\Box(\alpha \rightarrow \Box\alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha$

Beweis

Wir verwenden folgende Tautologien:

AT2 $(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \delta$

AT3 $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Und folgende Schlussregeln:

R14 $\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$ *und* $\vdash \delta \rightarrow \beta$ *und* $\vdash \gamma \rightarrow \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \vdash \Box(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha \rightarrow \epsilon$

1.	$(\delta \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	*Tautologie*
2.	$\Box(\delta \rightarrow \beta) \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \beta)$	*R$\Box$, K$^\Box$, KS*
3.	$\Box(\delta \rightarrow \beta)$	*Gen$^\Box$ (gegeben)*
4.	$\Box(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \beta)$	*MP(2,3)*
5.	$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	*gegeben*
6.	$\Box(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	*KS(4,5)*
7.	$\gamma \rightarrow \epsilon$	*gegeben*
8.	$\Box(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha \rightarrow \epsilon$	*MP(MP(AT2,6),7)*

R15 $\vdash \Box\alpha \rightarrow \beta$ *und* $\vdash \gamma \rightarrow \alpha$ *und* $\vdash \beta \rightarrow \delta \quad \Longrightarrow \quad \vdash \Box\gamma \rightarrow \delta$

1.	$\Box\gamma \rightarrow \Box\alpha$	*R$\Box$(gegeben)*
2.	$\Box\alpha \rightarrow \beta$	*gegeben*
3.	$\beta \rightarrow \delta$	*gegeben*
4.	$\Box\gamma \rightarrow \delta$	*KS(KS(1,2),3)*

R16 $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ *und* $\vdash \delta \rightarrow \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \rightarrow \delta \rightarrow \gamma$

Folgt aus der Tautologie $(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\delta \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \delta \rightarrow \gamma$ *mit MP.*

Nun zur eigentlichen Herleitung von T9:

1.	$\bigcirc\Box\alpha \to \bigcirc(\alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha)$	*R$\bigcirc$(Bem. 4.1)*
2.	$\alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha \to \bigcirc\Box\alpha$	*Tautologie*
3.	$\alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha \to \bigcirc(\alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha)$	*KS(2,1)*
4.	$\alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha \to \Box(\alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha)$	*IND(3)*
5.	$\Box(\alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha) \to \Box\alpha \wedge \Box\bigcirc\Box\alpha$	*T4*
6.	$\alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha \to \Box\alpha$	*KS(4,5)*
7.	$\bigcirc\Box\alpha \to \alpha \to \alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha$	*Tautologie*
8.	$\bigcirc\Box\alpha \to \alpha \to \Box\alpha$	*MP(MP(AT2,7),6)*
9.	$\Box\bigcirc\Box\alpha \to \Box(\alpha \to \Box\alpha)$	*R$\Box$(8)*
10.	$\Box\alpha \to \bigcirc\Box\alpha$	*Bem. 4.1*
11.	$\bigcirc\Box\alpha \to \bigcirc\bigcirc\Box\alpha$	*R$\bigcirc$(10)*
12.	$\bigcirc\Box\alpha \to \Box\bigcirc\Box\alpha$	*IND(11)*
13.	$\bigcirc\Box\alpha \to \Box(\alpha \to \Box\alpha)$	*KS(12,9)*
14.	$\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \Box\Box(\alpha \to \Box\alpha)$	*T6*
15.	$\bigcirc\Box\alpha \to \Box\Box(\alpha \to \Box\alpha)$	*KS(13,14)*
16.	$\Box(\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \alpha) \to \Box\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \Box\alpha$	*A3*
17.	$\Box(\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \alpha) \to \bigcirc\Box\alpha \to \Box\alpha$	*R16(16,15)*
18.	$\Box(\neg\Box\alpha \to \bigcirc\neg\Box\alpha) \to \neg\Box\alpha \to \Box\neg\Box\alpha$	*A4*
19.	$\Box\neg\Box\alpha \to \neg\Diamond\Box\alpha$	*folgt aus Def. $\Box$*
20.	$\Box(\neg\Box\alpha \to \neg\bigcirc\Box\alpha) \to \neg\Box\alpha \to \neg\Diamond\Box\alpha$	*R14(18,A1,19)*
21.	$\Box(\bigcirc\Box\alpha \to \Box\alpha) \to \Diamond\Box\alpha \to \Box\alpha$	*R15(20,AT3,AT3)*
22.	$\Box\Box(\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \alpha) \to \Box(\bigcirc\Box\alpha \to \Box\alpha)$	*R$\Box$(17)*
23.	$\Box(\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \alpha) \to \Box\Box(\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \alpha)$	*T6*
24.	$\Box(\Box(\alpha \to \Box\alpha) \to \alpha) \to \Diamond\Box\alpha \to \Box\alpha$	*KS(KS(23,22),21)*