Aspekte beweisbar totaler Funktionen in applikativen Theorien

Masterarbeit

der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bern

vorgelegt von
Sebastian Eberhard

August 2009

Leiter der Arbeit:

Prof. Dr. Gerhard Jäger

Institut für Informatik und angewandte Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit Funktionen, welche in zwei bestimmten Modifikationen der bekannten applikativen Theorie BON beweisbar total sind. Die Modifikationen von BON erhält man jeweils durch das Weglassen der Rekursoraxiome und die Hinzunahme von Induktionsschemas. Das erste dieser Schemas ist die N-freie Induktion, das zweite ist die *positive* N-freie Induktion. Ich beweise, dass in den beiden Modifikationen die Totalität von viel weniger Funktionen bewiesen werden kann als in BON selbst. Somit beweise ich, dass die Rekursoraxiome wesentlich zur Beweis-Stärke von BON beitragen.

Für die beiden Modifikationen verwende ich zwei verschiedene Techniken um zu beweisen, dass nur ein kleiner Teil der primitiv rekursiven Funktionen beweisbar total sind. Für die Modifikation mit N-freier Induktion verwende ich die Technik der asymmetrischen Interpretation. Ich erhalte die folgende Abschätzung der Werte einer beweisbar totalen Funktion f:

$$f(n_0, \cdots, n_{m-1}) < max(n_i \mid i < m) + c_f$$

wobei c_f eine von f abhängige Konstante ist.
Für die Modifikation mit *positiver* N-freier Induktion verwende ich die Technik der Realisierung. Ich erhalte das Resultat, dass alle beweisbar totalen Funktionen der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 angehören.
Insbesondere gelten für Systeme, welche man aus BON durch das Weglassen der Rekursoraxiome und die Hinzunahme von Set-Induction oder Semi-Set-Induction erhält, beide oben genannten Beschränkungen für die Menge der beweisbar totalen Funktionen.

Kapitel 1

Einführung

Dieses Kapitel enthält zum einen grundlegende Definitionen und Notationskonventionen. Zum anderen werden Sätze bewiesen, welche sowohl für die asymmetrische Interpretation in Kapitel zwei als auch für die Realisierung in Kapitel drei verwendet werden.

1.1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1.1. [Sprache L]
Alle in dieser Arbeit vorkommenden Kalküle werden in der Sprache L oder der Erweiterung von L um die logischen Symbole $\wedge$ und $\forall$ formuliert. Die Sprache L umfasst folgende Grundzeichen:

1. Abzählbar unendlich viele Variablen $x_0, x_1, \cdots, x_i, \cdots (i \in \mathbb{N})$.
2. Die logischen Symbole $\neg$ (nicht), $\vee$ (oder), $\exists$ (es gibt).
3. Das 1-stellige Relationssymbol $\downarrow$ für Definiertheit und das 2-stellige Relationssymbol $=$ für Gleichheit.
4. Das 1-stellige Relationssymbol N für die natürlichen Zahlen.
5. Die 0-stelligen Funktionssymbole $k, s, p, p_0, p_1, 0, s_N, p_N, d, r_N$.
6. Das 2-stellige Funktionssymbol *App* für die Anwendung.

Im Folgenden bezeichne $\equiv$ stets syntaktische Gleichheit.

Definition 1.1.2. [Term]
Terme werden induktiv über die Anzahl der in ihnen vorkommenden *App*-Symbole definiert. t sei genau dann ein Term, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $t \equiv x$, wobei x eine Variable von L ist.

(2) $t \equiv c$, wobei c ein 0-stelliges Funktionssymbol von L ist.

(3) $t \equiv App(t_1, t_2)$, wobei t_1 und t_2 Terme sind.

Durch die Streichung von (1) in der oben stehenden Definition erhält man die Definition von geschlossenen Termen.

1.2 Notationskonventionen und Meta-Ausdrücke

Alle hier angegebenen Abkürzungen kürzen Ausdrücke der Sprache L ab. Alle hier angegebenen Meta-Ausdrücke referieren auf Ausdrücke der Sprache L.

1.2.1 Abkürzungen

Die logischen Zeichen $\wedge$ und $\forall$ sind in der üblichen Weise als Abkürzungen definiert ausser in Kalkülen, deren Sprache die Erweiterung von L um diese Zeichen ist. Ausdrücke der Form $A_0 \wedge \cdots \wedge A_n \to B_0 \vee \cdots \vee B_m$ kürzen die Formel $\neg A_0 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee B_0 \vee \cdots \vee B_m$ ab.
Es seien t und t_i Terme. In der Tabelle unten kürzt der Ausdruck links von $:=$ jeweils den Ausdruck rechts von $:=$ ab:

$t_0 \simeq t_1$	$:= t_0{\downarrow} \vee t_1{\downarrow} \to t_0 = t_1$
$t \in N$	$:= N(t)$
$t \notin N$	$:= \neg N(t)$
$t_0 t_1 \cdots t_{n-1} t_n$	$:= App(App(\cdots App(App(t_0, t_1), t_2) \cdots), t_{n-1}), t_n)$
$<t_0, t_1>$	$:= App(App(p, t_0), t_1)$
$(t \ : \ N \to N)$	$:= \forall x \ (x \in N \to App(t, x) \in N)$
$(t \ : \ N^{n+1} \to N)$	$:= \forall x \ (x \in N \to (App(t, x) \ : \ N^n \to N))$
$\overline{m}$	$:= s_N(s_N(\cdots(s_N 0)\cdots))$, wobei links s_N m-Mal vorkommt.

1.2.2 Meta-Ausdrücke

In der gesamten Arbeit werden die folgenden Konventionen verwendet:

- x, y und z bezeichnen Variablen.
- $\vec{x}$ bezeichne eine endliche Folge von Variablen. Die i-te Komponente dieser Folge wird als x_i bezeichnet.
- a, b, c, f, g, s und t bezeichnen Terme.
- $\vec{t}$ bezeichne eine endliche Folge von Termen. Die i-te Komponente dieser Folge wird als t_i bezeichnet.
- A und B bezeichnen Formeln.
- $A(x/t)$ bezeichne die Formel, welche aus A durch die Ersetzung der Variablen x durch den Term t entsteht, falls x durch t substituierbar ist. (Es gelten die normalen Substituierbarkeitsregeln.) Falls klar oder irrelevant ist, welche Variable x ersetzt werden soll, so wird $A(x/t)$ durch $A(t)$ abgekürzt.
- Γ und Δ bezeichnen Formelmengen.
- $\Gamma[\vec{x}]$ bezeichne eine Formelmenge, deren freie Variablen alle genau einmal als Komponente in $\vec{x}$ vorkommen.

- $\Gamma[\vec{x}/\vec{t}]$ bezeichne die Formelmenge, welche aus der Formelmenge $\Gamma[\vec{x}]$ durch die Ersetzung jeder Variablen x_i durch den Term t_i entsteht, falls x_i durch t_i substituierbar ist. Falls klar oder irrelevant ist, welche Folge von Variablen $\vec{x}$ ersetzt werden soll, so wird $\Gamma[\vec{x}/\vec{t}]$ durch $\Gamma[\vec{t}]$ abgekürzt. Für einen Term s sei $s[\vec{t}]$ in analoger Weise definiert. Es wird stets davon ausgegangen, dass in Ausdrücken der Form $\Gamma[\vec{x}/\vec{t}]$ oder $s[\vec{x}/\vec{t}]$ der Vektor $\vec{t}$ mindestens so lang ist wie der Vektor $\vec{x}$.

Alle hier erwähnten Zeichen werden bei Bedarf mit Indizes versehen.

1.3 Primitiv rekursive Funktionen

Die Menge der primitiv rekursiven Funktionen (abgekürzt: **PR**) ist eine Funktionen-Algebra von Funktionen von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$. Es seien k und p natürliche Zahlen grösser als 0. Es seien m, n_i und n beliebige natürliche Zahlen. Die Funktionen-Algebra besitzt die folgenden Basis-Funktionen:

$S:$	$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \in \mathbf{PR}$,	wobei $S(n) = n + 1$.	(Nachfolgerfunktion)
$C^k_m:$	$\mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \in \mathbf{PR}$,	wobei $C^k_m(n_0, \cdots, n_{k-1}) = m$.	(Konstante Funktion)
$\pi^k_i:$	$\mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \in \mathbf{PR}$,	wobei $i < k$ und $\pi^k_i(n_0, \cdots, n_{k-1}) = n_i$.	(Projektionsfunktion)

PR sei unter den folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komposition:
  - Es gelte $g : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N} \in \mathbf{PR}$.
  - Es gelte $f_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \in \mathbf{PR}$ für alle $i < p$.

  Dann gilt $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \in \mathbf{PR}$, wobei $h(n_0, \cdots, n_{k-1}) = g(f_0(n_0, \cdots, n_{k-1}), \cdots, f_{p-1}(n_0, \cdots, n_{k-1}))$.
- Rekursion:
  - Es gelte $g : \mathbb{N}^{k+3} \to \mathbb{N} \in \mathbf{PR}$.
  - Es gelte $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \in \mathbf{PR}$.

  Dann gilt $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N} \in \mathbf{PR}$, wobei h durch die folgende Rekursionsbedingung gegeben ist:
  - $h(n_0, \cdots, n_k, 0) = f(n_0, \cdots, n_k)$
  - $h(n_0, \cdots, n_k, n + 1) = g(n_0, \cdots, n_k, n, h(n_0, \cdots, n_k, n))$

1.4 Die Grzegorczyk-Hierarchie

Die Grzegorczyk-Hierarchie ist eine Folge von Mengen primitiv rekursiver Funktionen. Jeder natürlichen Zahl i wird eine Menge $\mathbb{E}_i$ zugeordnet. Es gelten die beiden folgenden wesentlichen Eigenschaften:

- Jede primitiv rekursive Funktion ist in $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_i$ enthalten.
- Für jede natürliche Zahl n gilt: $\mathbb{E}_n \subset \mathbb{E}_{n+1}$.

Um eine Familie von $\mathbb{E}_i$ mit diesen Eigenschaften definieren zu können werden zwei Hilfsdefinitionen benötigt:

Definition 1.4.1. [Die Funktion E_i]
Es seien i und n beliebige natürliche Zahlen. Die Funktion E_i ist durch die folgenden Bedingungen festgelegt:

- $E_0(x, y) = x + y$
- $E_1 = x^2 + 2$
- $E_{n+2}(0) = 2$
- $E_{n+2}(x + 1) = E_{n+1}(E_{n+2}(x))$

Definition 1.4.2. [Beschränkter Rekursionsoperator]
Es seien die Funktionen f, g, j und h mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

- $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$
- $g : \mathbb{N}^{k+3} \to \mathbb{N}$
- $j : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$
- $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$
- $h(n_0, \cdots, n_k, 0) = f(n_0, \cdots, n_k)$
- $h(n_0, \cdots, n_k, n + 1) = g(n_0, \cdots, n_k, n, h(n_0, \cdots, n_k, n))$
- $h(\vec{n}) \leq j(\vec{n})$ für alle $\vec{n} \in \mathbb{N}^{k+2}$

Dann und nur dann, ergibt sich h durch die Anwendung des beschränkten Rekursionsoperators auf das Tripel (f, g, j).

Definition 1.4.3. [Die Funktionen-Algebra $\mathbb{E}_i$]

- $\mathbb{E}_0$ bezeichne die Funktionen-Algebra, deren Basisfunktionen die Basisfunktionen der primitiv rekursiven Funktionen sind. $\mathbb{E}_0$ sei unter Komposition und dem beschränkten Rekursionsoperator abgeschlossen.
- $\mathbb{E}_{n+1}$ bezeichne die Funktionen-Algebra, welche neben den Basisfunktionen von $\mathbb{E}_0$ auch die Funktion E_n als Basisfunktion enthält. $\mathbb{E}_{n+1}$ sei unter Komposition und beschränkter Rekursion abgeschlossen.

1.5 Das System *BON*

BON ist ein bekanntes applikatives System. Es ist in der Sprache L formuliert und hat die Schlussregeln der Logik der partiellen Terme. Die Abkürzung *BON* steht für „Basic Theory of Operations and Numbers“. In dieser Arbeit sollen die in zwei Modifikationen von *BON* beweisbar totalen Funktionen eingeschränkt werden. In diesem Abschnitt werden die Axiome und Regeln der Ausgangstheorie *BON* angegeben damit im nächsten Abschnitt die beiden Modifikationen definiert werden können.

1.5.1 Terme, Formeln und Bezeichnungen in BON

Die Terme des Kalküls BON sind durch die Definition 1.1.2 gegeben. Die Formeln dieses Kalküls sind partielle-Terme-Formeln und durch die folgende Definition gegeben:

Definition 1.5.1. [Partielle-Terme-Formel]
Partielle-Terme-Formeln (p.T. Formeln) sind Formeln der Sprache L. Sie sind induktiv über den Formelaufbau definiert unter Voraussetzung der Definition von Term. A ist genau dann eine p.T. Formel, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $A \equiv t_1 = t_2$, wobei t_1 und t_2 Terme sind.

(2) $A \equiv N(t)$, wobei t ein Term ist.

(3) $A \equiv t\downarrow$, wobei t ein Term ist.

(4) $A \equiv \neg B$, wobei B eine p.T. Formel ist.

(5) $A \equiv A_0 \vee A_1$, wobei A_0 und A_1 p.T. Formeln sind.

(6) $A \equiv \exists x\ B$, wobei B eine p.T. Formel und x eine Variable der Sprache L ist.

Im gesamten Kapitel eins wird mit dem Begriff „Formel“ eine p.T. Formel bezeichnet.

Definition 1.5.2. [$t_0 \neq t_1$ als Abkürzung einer p.T. Formel]
Für zwei beliebige Terme t_0 und t_1 kürze der Ausdruck $t_0 \neq t_1$ die p.T. Formel $t_0\downarrow \wedge t_1\downarrow \wedge \neg t_0 = t_1$ ab.

1.5.2 Logische Axiome und Schlussregeln von BON

Das Kalkül BON beinhaltet unter anderem die Axiome und Schlussregeln der partiellen Logik. Diese findet man für allgemeine applikative Sprachen in [Jäg96], S. 1 bis 8 formuliert. Für die spezielle Sprache L, welche in dieser Arbeit verwendet wird, kann man diese Axiome und Schlussregeln leicht vereinfachen.

(1) Die aussagenlogischen Axiome und Schlussregeln werden aus der klassischen Logik übernommen.

(2) Gegeben sind Quantorenaxiome und Quantorenregeln der folgenden Form:

$$A(x/a) \wedge a\downarrow \to \exists x A \qquad \text{und} \qquad \frac{A \to B}{\exists x A \to B}$$

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Variable x in B nicht frei vorkommt.

(3) Es sind die folgenden Axiome für „$\downarrow$“ gegeben (Definiertheitsaxiome):

(D1) $z\downarrow$, falls z eine Variable oder ein 0-stelliges Funktionssymbol ist.

(D2) $t_1 t_2\downarrow \to t_1\downarrow \wedge t_2\downarrow$

(D3) $t_1 = t_2 \to t_1\downarrow \wedge t_2\downarrow$

(D4) $t \in N \to t\downarrow$

(4) Es sind die folgenden Axiome für „=“ gegeben (Gleichheitsaxiome):

(E1) $x = x$

(E2) $s = t \to t = s$

(E3) $s = t \land t = u \to s = u$

(E4) $s \in N \land s = t \to t \in N$

(E5) $s_0 = t_0 \land s_1 = t_1 \to s_0 s_1 = t_0 t_1$

Die im Vergleich zu [Jäg96] vereinfachten Axiomtypen sind D2, D4, E4 und E5. Axiome von Systemen werden in dieser Arbeit immer so beschrieben, dass in runden Klammern der Typ der Axiome steht z.B. (E2). Rechts davon ist die Form aller Axiome dieses Typs gegeben.

1.5.3 Nicht-logische Axiome von BON

Die nicht-logischen Axiome lassen sich in fünf Typen einteilen:

(I) Partielle kombinatorische Algebra

(1) $kxy = x$

(2) $sxy\downarrow \land sxyz \simeq (xz)(yz)$

(II) Paaren und Projizieren

(3) $p_0 x\downarrow \land p_1 x\downarrow$

(4) $p_0{<}x, y{>} = x \land p_1{<}x, y{>} = y$

(III) Natürliche Zahlen

(5) $0 \in N \land \forall x\ (x \in N \to s_N x \in N)$

(6) $\forall x\ (x \in N \to s_N x \neq 0 \land p_N(s_N x) = x)$

(7) $\forall x\ (x \in N \land x \neq 0 \to p_N x \in N \land s_N(p_N x) = x)$

(IV) Numerische Fallanalyse

(8) $u \in N \land v \in N \land u = v \to dxyuv = x$

(9) $u \in N \land v \in N \land u \neq v \to dxyuv = y$

(V) Primitive Rekursion auf N

(10) $(f\ :\ N \to N) \land (g\ :\ N^3 \to N) \to (r_N fg\ :\ N^2 \to N)$

(11) $(f\ :\ N \to N) \land (g\ :\ N^3 \to N) \land x \in N \land y \in N \land h = r_N fg \to$
$hx0 = fx \land hx(s_N y) = gxy(hxy)$

1.6 Die Systeme $BON^{-}+ IND$ und $BON^{-}+ posIND$

Definition 1.6.1. [$BON^{-}+ IND$]
Es sei A eine N-freie Formel und t ein beliebiger Term. Das System $BON^{-}+ IND$ entsteht aus BON durch das Weglassen der Rekursoraxiome (10) und (11) und das Hinzufügen aller Formeln der Form des Induktionsschemas als nicht-logische Axiome.

$$\neg A(0) \vee \exists x\ (x \in N \wedge A(x) \wedge \neg A(s_N x)) \vee t \notin N \vee A(t) \qquad \text{(Induktionsschema)}$$

Definition 1.6.2. [Positive und negative p.T. Formeln]
Die Definitionen positiver und negativer p.T. Formeln werden induktiv nach dem Formelaufbau geliefert. Die Definition von positiven/negativen p.T. Formeln einer bestimmten Komplexitätsstufe setzt jeweils die Definition von positiven und negativen p.T. Formeln auf kleineren Komplexitätsstufen voraus:

- Formeln, welche die Bedingung (1), (2) oder (3) der Definition 1.5.1 erfüllen, sind positiv.
- Die Formel $\neg A$ ist negativ, falls A positiv ist.
- Die Formel $\neg A$ ist positiv, falls A negativ ist.
- Die Formel $A_0 \vee A_1$ ist positiv/negativ, falls A_0 und A_1 beide positiv/negativ sind.
- Die Formel $\exists x\ A(x)$ ist positiv/negativ, falls $A(x)$ positiv/negativ ist.

Definition 1.6.3. [$BON^{-}+ posIND$]
Das System $BON^{-}+ posIND$ unterscheidet sich vom System $BON^{-}+ IND$ nur in einem einzigen Punkt: Eine Formel wird nur dann als nicht-logisches Axiom hinzugefügt, wenn sie die Form des Induktionsschemas für ein *positives*, N-freies A hat.

1.7 Das Termmodell

Für die asymmetrische Interpretation des N-Prädikats und die Realisierung von positiven Sequenzen wird jeweils das Termmodell von BON verwendet. In diesem Abschnitt wird eine Definition dieses Modells angegeben und bewiesen, dass es tatsächlich ein Modell von BON ist.
Die Idee des Termmodells ist ein Universum aus Äquivalenzklassen geschlossener Terme zu bilden. Die Äquivalenzklassen werden durch den symmetrischen Abschluss einer Reduktionsrelation gewonnen. Auf diese Weise wird gewährleistet, dass alle Terme t_0 und t_1 mit $BON \vdash t_0 = t_1$ vom Termmodell unter jeder Interpretation der Variablen als gleich betrachtet werden.

Definition 1.7.1. [Relation $\rightarrow$]
Die Relation $\rightarrow$ ist eine zweistellige Relation auf Termen. Es seien n und m zwei unterschiedliche natürliche Zahlen. Es seien a, b, c, s und t Terme. Es gelte $s \rightarrow t$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$s \equiv kab$	und	$t \equiv a$
$s \equiv sabc$	und	$t \equiv (ac)(bc)$
$s \equiv p_0{<}a, b{>}$	und	$t \equiv a$
$s \equiv p_1{<}a, b{>}$	und	$t \equiv b$
$s \equiv p_N 0$	und	$t \equiv 0$
$s \equiv p_N(s_N a)$	und	$t \equiv a$
$s \equiv dab\overline{m}\overline{m}$	und	$t \equiv a$
$s \equiv dab\overline{m}\overline{n}$	und	$t \equiv b$
$s \equiv r_N abc0$	und	$t \equiv ac$
$s \equiv r_N abc\overline{n+1}$	und	$t \equiv bc\overline{n}(r_N abc\overline{n})$

Unter Verwendung der Relation $\rightarrow$ kann man die Reduktionsrelation $\rhd$ definieren.

Definition 1.7.2. [Relation $\rhd$]
Die Reduktionsrelation $\rhd$ ist ebenfalls eine zweistellige Relation auf Termen. Es seien a, b und c beliebige Terme. $\rhd$ ist die kleinstmögliche Relation, welche die nachfolgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $a \rhd a$

(2) $a \rightarrow b \;\Rightarrow\; a \rhd b$

(3) $a \rhd b \;\Rightarrow\; ac \rhd bc$

(4) $a \rhd b \;\Rightarrow\; ca \rhd cb$

(5) $a \rhd b$ und $b \rhd c \;\Rightarrow\; a \rhd c$

Definition 1.7.3. [Normalform]
Ein Term s ist genau dann in Normalform, wenn für alle Terme t gilt:

$$s \rhd t \;\Rightarrow\; s \equiv t$$

Definition 1.7.4. [Relation $\approx$]
Die Relation $\approx$ sei der symmetrische Abschluss der Reduktionsrelation $\rhd$.

Lemma 1.7.5. *[Wichtige Eigenschaften von $\approx$]*

(1) $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation.

(2) Es seien a, b, s und t Terme mit $a \approx b$ und $s \approx t$. Dann gilt $as \approx bt$.

Beweis. $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation, da sie der symmetrische Abschluss einer reflexiven und transitiven Relation ist. (2) folgt direkt aus (3) und (4) in der Definition 1.7.2.

□

Satz 1.7.6. *[Church-Rosser-Theorem]*
Sind a, b und c Terme mit $a \rhd b$ und $a \rhd c$, so existiert ein Term t mit $b \rhd t$ und $c \rhd t$.

Der komplizierte Beweis dieses Satzes wird weggelassen. Einen Beweis findet man in [Sel07], S.25 bis 35.
Das folgende Lemma beweist, dass die $\approx$-Äquivalenzklassen nicht zu viele Terme enthalten.

Lemma 1.7.7. *Für jeden Term t enthält die Äquivalenzklasse $[t]_\approx$ höchstens einen Term in Normalform.*

Beweis. Als erstes kann man beweisen, dass für einen beliebigen Term a und einen Term t_n in Normalform gilt:

$$a \approx t_n \;\Rightarrow\; a \rhd t_n \tag{1}$$

Dies beweist man induktiv nach der Länge k der $\rhd$-Kette, welche a und t_n verbindet. Der Fall $k = 0$ ist trivial. Es gelte nun also (1) für alle $k < n + 1$. a sei das $n + 1$-te Glied einer $\rhd$-Kette zwischen a und t_n, $\hat{a}$ sei das n-te. Man muss zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1 Es gilt $a \rhd \hat{a}$: Aus der Transitivität von $\rhd$ und der Induktionsvoraussetzung folgt (1).

Fall 2 Es gilt $\hat{a} \rhd a$: Aus dem Church-Rosser-Theorem und der Induktionsvoraussetzung folgt die Existenz eines Terms t mit $t_n \rhd t$ und $a \rhd t$. Da t_n in Normalform ist, gilt $t \equiv t_n$.

Somit folgt (1). Mit Hilfe von (1) kann man den zu zeigenden Satz sofort beweisen: Es gebe also zwei Terme t_1 und t_2 in Normalform mit $a \approx t_1$ und $a \approx t_2$. Es gilt wegen (1) $a \rhd t_1$ und $a \rhd t_2$. Aus dem Church-Rosser-Theorem folgt die Existenz eines Terms t mit $t_1 \rhd t$ und $t_2 \rhd t$. Weil t_1 und t_2 in Normalform sind, müssen sie somit gleich sein.

$\square$

Definition 1.7.8. [Termmodell]
Das Termmodell (abgekürzt: $\mathcal{TM}$) ist eine partielle L-Struktur. (Definition von partiellen L-Strukturen: [Jäg96], S. 8 bis 11.) $\mathcal{TM}$ habe die folgenden Eigenschaften:

(1) Das Universum von $\mathcal{TM}$ besteht aus den $\approx$-Äquivalenzklassen der geschlossenen Terme.

(2) Das Relationssymbol N wird in $\mathcal{TM}$ durch die Menge der $\approx$-Äquivalenzklassen der Numerale interpretiert:

$$N^{\mathcal{TM}} := \{[\overline{n}]_\approx : n \in \mathbb{N}\}$$

(3) Alle 0-stelligen Funktionssymbole von L werden in $\mathcal{TM}$ durch ihre $\approx$-Äquivalenzklasse interpretiert.

(4) Das 2-stellige Funktionssymbol *App* für die Anwendung wird in $\mathcal{TM}$ durch die Funktion $\mathbf{App} : |\mathcal{TM}| \times |\mathcal{TM}| \to |\mathcal{TM}|$ interpretiert. Diese ist folgendermassen definiert:

$$\mathbf{App}([a]_\approx, [b]_\approx) := [ab]_\approx$$

Die Wahrheit und Falschheit von Formeln in $\mathcal{TM}$ werden in der für partielle L-Strukturen gewöhnlichen Weise festgelegt (siehe [Jäg96], S.9 und 10). Dasselbe gilt für die Gültigkeit (siehe [Jäg96], S.11). Es gilt also $\mathcal{TM} \models A$, wenn die Formel A in $\mathcal{TM}$ unter allen Belegungen der freien Variablen wahr ist.

Satz 1.7.9. *$\mathcal{TM}$ ist wohldefiniert und ist ein Modell von BON. Es erfüllt zudem alle Formeln der Form $t\downarrow$ und alle Formeln der Form des Induktionsschemas (siehe Seite 7).*

Beweis. Die Wohldefiniertheit von $\mathcal{TM}$ folgt aus der Wohldefiniertheit der in (4) definierten Funktion. Diese ist wegen Lemma 1.7.5 gegeben.
Weil $\mathcal{TM}$ als partielle L-Struktur definiert ist, erfüllt es die logischen Axiome von BON. Alle Formeln der Form $t\downarrow$ erfüllt $\mathcal{TM}$ trivialerweise aufgrund seiner Konstruktion aus Äquivalenzklassen. Weil genau die Äquivalenzklassen der Nachfolger von 0 in $N^{\mathcal{TM}}$ sind und auf diesen vollständige Induktion möglich ist, erfüllt $\mathcal{TM}$ jede Formel der Form des Induktionsschemas.

$\mathcal{TM}$ erfüllt auch alle nicht-logischen Axiome von BON:

- In den Axiomen des Typs (1) bis (4) kann man alle Konjunkte der Form $t\downarrow$ weglassen, weil $\mathcal{TM}$ diese immer erfüllt. Die modifizierten Axiomtypen werden jeweils aufgrund der Definition von $\approx$ erfüllt.

- Die Axiome des Typs (5) bis (9) werden aufgrund der Definition von $\approx$ und der Definition von $N^{\mathcal{TM}}$ erfüllt. Für die Axiome des Typs (6) und (8) muss man zudem verwenden, dass verschiedene Numerale nicht in der gleichen Äquivalenzklasse sind. Dies folgt direkt aus dem Lemma 1.7.7.

- Eine vollständige Induktion auf den Elementen von $N^{\mathcal{TM}}$ beweist, dass $\mathcal{TM} \vDash r_N fg : N^2 \to N$ gilt, falls f und g die im Antezedens von (10) geforderten Eigenschaften haben. Als Induktionsverankerung dieser Induktion verwendet man für jedes Element $[t]_\approx$ in $N^{\mathcal{TM}}$ $[r_N fgt0]_\approx \in N^{\mathcal{TM}}$, was aufgrund der Definition von $\approx$ und der Annahme über t und f wahr ist. Der Induktionsschritt funktioniert aufgrund der Vorraussetzung über g.

- Axiome des Typs (11) sind in $\mathcal{TM}$ ebenfalls erfüllt, denn aufgrund der Definition von $\approx$ und $N^{\mathcal{TM}}$ erfüllt $\mathcal{TM}$ sogar die folgende stärkere Aussage:

$$y \in N \land h = r_N fg \to hx0 = fx \land hx(s_N y) = gxy(hxy)$$

$\square$

Im Termmodell lässt sich auf natürliche Weise eine Ordnungsrelation $<$ definieren. Diese ist auf den Nachfolgern von 0 eine Wohlordnung. Mit Hilfe dieser Relation wird das N-Prädikat im Abschnitt 2.5 asymmetrisch interpretiert.

Definition 1.7.10. [Die Relation $<$ in $\mathcal{TM}$]
Es seien $[t_0]_\approx$ und $[t_1]_\approx$ Elemente von $\mathcal{TM}$. Es gelte $[t_0]_\approx < [t_1]_\approx$ genau dann, wenn die folgenden drei Eigenschaften gelten:

(1) Der Term $s_N(s_N(s_N(s_N(...(s_N(s_N(s_N(s_N0))))...))))$, in dem s_N N-Mal vorkommt, ist in der $\approx$-Äquivalenzklasse von t_0.

(2) Der Term $s_N(s_N(s_N(s_N(...(s_N(s_N(s_N(s_N0))))...))))$, in dem s_N M-Mal vorkommt, ist in der $\approx$-Äquivalenzklasse von t_1.

(3) N ist kleiner als M.

Es seien t_0 und t_1 Terme. Mit Hilfe der oben definierten Relation kann man definieren, wann die Formel $t_0 < t_1$ im Termmodell gültig ist:
Es gelte $\mathcal{TM} \vDash t_0 < t_1$ genau dann, wenn für alle Vektoren $\vec{a}$ aus geschlossenen Termen $[t_0[\vec{a}]]_\approx < [t_1[\vec{a}]]_\approx$ gilt. Für Formeln, welche eine Teilformel der Form $t_0 < t_1$ haben, sei deren Gültigkeit in $\mathcal{TM}$ in der naheliegenden Weise definiert.

Kapitel 2

Asymmetrische Interpretation von $BON^{-}+ IND$

2.1 Ziel und Strategie

In diesem Kapitel wird bewiesen, dass in $BON^{-}+ IND$ beweisbar totale Funktionen ein sehr schwaches Wachstum haben. Für eine in $BON^{-}+ IND$ beweisbar totale Funktion f gilt:

$$f(n_0, \cdots, n_{m-1}) < max(n_i \mid i < m) + c_f$$

wobei c_f eine von f abhängige Konstante ist. (Definition von beweisbarer Totalität: siehe 2.6.1.)
Die Strategie dies zu zeigen ist $BON^{-}+ IND$ in ein Tait-Style-Kalkül BON^* einzubetten. Das System BON^* habe die Eigenschaft, dass seine Theoreme im Termmodell gültig sind und dass Totalität gilt. Der Vorteil der Verwendung eines totalen Systems BON^* ist, dass man die Quantorenregeln der klassischen Logik hat. Das N-Prädikat von BON^* wird asymmetrisch interpretiert mit Hilfe der in 1.7.10 definierten Relation $<$. Dies liefert eine Einschränkung der in BON^* beweisbar totalen Funktionen, da die Totalität einer Funktion einer BON^*-Formelmenge mit charakteristischen negativen und positiven Vorkommnissen von N entspricht. Weil $BON^{-}+ IND$ in BON^* einbettbar ist, kann diese Einschränkung auf $BON^{-}+ IND$ übertragen werden.
Die asymmetrische Einbettung von BON^* in $\mathcal{TM}$ setzt wie üblich eine teilweise Elimination der Schnitte voraus, welche in diesem Kapitel ebenfalls geliefert wird.

2.2 Das System BON^*

2.2.1 Terme, Formeln und Bezeichnungen in BON^*

BON^* ist ein Tait-Style-Kalkül. Die Sprache von BON^* ist L erweitert um $\wedge$ und $\forall$. Die Terme von BON^* sind in Definition 1.1.2 definiert. Die Formeln von BON^* sind Tait-Kalkül-Formeln und sind durch die folgende Definition gegeben:

Definition 2.2.1. [Tait-Kalkül-Formel]
Tait-Kalkül-Formeln (T.K. Formeln) sind Formeln der Sprache L erweitert um $\wedge$ und $\forall$. Sie lassen sich induktiv über den Formelaufbau definieren unter Voraussetzung der Definition von Term. A sei eine T.K. Formel genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $A \equiv t_1 = t_2$, wobei t_1 und t_2 Terme sind.

(2) $A \equiv N(t)$, wobei t ein Term ist.

(3) $A \equiv t\downarrow$, wobei t ein Term ist.

(4) $A \equiv \neg B$, wobei B die Bedingung (1), (2) oder (3) erfüllt.

(5) $A \equiv A_0 \vee A_1$, wobei A_0 und A_1 T.K. Formeln sind.

(6) $A \equiv A_0 \wedge A_1$, wobei A_0 und A_1 T.K. Formeln sind.

(7) $A \equiv \exists x\ B$, wobei B eine T.K. Formel und x eine Variable der Sprache L ist.

(8) $A \equiv \forall x\ B$, wobei B eine T.K. Formel und x eine Variable der Sprache L ist.

Im ganzen Kapitel zwei wird mit dem Begriff „Formel“ stets eine T.K. Formel bezeichnet. Formeln, welche (1), (2), (3) oder (4) erfüllen, werden als T.K. Atomformeln bezeichnet. Im ganzen Kapitel zwei wird mit dem Begriff „Atomformel“ stets eine T.K. Atomformel bezeichnet.

Definition 2.2.2. [$\neg A$]
Für alle Formeln A ist $\neg A$ als Bezeichnung für die folgende Formel definiert:

- Falls A (1), (2) oder (3) der Definition 2.2.1 erfüllt, bezeichne $\neg A$ sich selbst.
- Falls $A \equiv \neg B$ und B (1), (2) oder (3) der Definition 2.2.1 erfüllt, bezeichne $\neg A$ die Formel B.
- Falls $A \equiv A_0 \vee A_1$, so bezeichne $\neg A$ die Formel $\neg A_0 \wedge \neg A_1$.
- Falls $A \equiv A_0 \wedge A_1$, so bezeichne $\neg A$ die Formel $\neg A_0 \vee \neg A_1$.
- Falls $A \equiv \exists x\ B(x)$, so bezeichne $\neg A$ die Formel $\forall x\ \neg B(x)$.
- Falls $A \equiv \forall x\ B(x)$, so bezeichne $\neg A$ die Formel $\exists x\ \neg B(x)$.

Definition 2.2.3. [$t_0 \neq t_1$ als Abkürzung einer T.K. Formel]
Für zwei beliebige Terme t_0 und t_1 kürze der Ausdruck $t_0 \neq t_1$ die T.K. Formel $\neg t_0 = t_1$ ab.

Diese Abkürzungskonvention weicht von der im ersten Kapitel gegebenen ab (siehe Definition 1.5.2). Dies erlaubt eine elegantere Beschreibung der Axiome von BON^*.

2.2.2 Axiome von BON^*

Γ bezeichne in dieser Arbeit stets eine beliebige Formelmenge ausser wenn es anders bestimmt wird.

Logische Axiome

(1) Für alle Atomformeln A sei $\Gamma, A, \neg A$ ein Axiom von BON^*.

(2) BON^* enthält die folgenden Gleichheitsaxiome:

E1 $\Gamma, t = t$

E2 $\Gamma, s = t, t \neq s$

E3 $\Gamma, s \neq t, t \neq u, s = u$

E4 $\Gamma, s \notin N, s \neq t, t \in N$

E5 $\Gamma, s_1 \neq t_1, s_2 \neq t_2, s_1 s_2 = t_1 t_2$

Nicht-logische Axiome

Im System BON^* gelte Totalität. Deshalb seien Axiome der Form $\Gamma, t\downarrow$ für jeden Term t vorhanden. Weil die Tait-Style Formulierungen der D-Axiome sofort aus der Totalität folgen, sind sie nicht in den logischen Axiomen von BON^* vorhanden.
Die restlichen nicht-logischen Axiome von BON^* sind:

(1) $\Gamma, kt_0t_1 = t_0$

(2) $\Gamma, st_0t_1t_2 = (t_0t_2)(t_1t_2)$

(4a) $\Gamma, p_0{<}t_0, t_1{>} = t_0$

(4b) $\Gamma, p_1{<}t_0, t_1{>} = t_1$

(5a) $\Gamma, 0 \in N$

(5b) $\Gamma, t \notin N, s_N t \in N$

(6a) $\Gamma, t \notin N, s_N t \neq 0$

(6b) $\Gamma, t \notin N, p_N(s_N t) = t$

(7a) $\Gamma, t = 0, t \notin N, p_N t \in N$

(7b) $\Gamma, t = 0, t \notin N, s_N(p_N t) = t$

(8) $\Gamma, t_2 \notin N, t_3 \notin N, t_2 \neq t_3, dt_0t_1t_2t_3 = t_0$

(9) $\Gamma, t_2 \notin N, t_3 \notin N, t_2 = t_3, dt_0t_1t_2t_3 = t_1$

Diese Axiome erhält man aus den nicht-logischen Axiomen von BON (siehe Seite 6) durch das Weglassen von Teilformeln der Form $t\downarrow$, das Weglassen von Quantoren und das Aufspalten von Axiomen, welche Konjunktionen enthalten.

2.2.3 Schlussregeln von BON^*

Oder-Einführung rechts

$$\frac{\Gamma, A}{\Gamma, A \vee B}$$

Oder-Einführung links

$$\frac{\Gamma, B}{\Gamma, A \vee B}$$

Und-Einführung

$$\frac{\Gamma, A \text{ und } \Gamma, B}{\Gamma, A \wedge B}$$

Man kann die Quantorenregeln der klassischen Logik verwenden, da Totalität gegeben ist:

Existenzquantor-Einführung

$$\frac{\Gamma, A(x/t)}{\Gamma, \exists x\ A(x)}$$

Allquantor-Einführung

$$\frac{\Gamma, A(x/u)}{\Gamma, \forall x\ A(x)}$$

N-freie Induktion

$$\frac{\Gamma, A(0) \text{ und } \Gamma, x \notin N, \neg A(x), A(s_N x)}{\Gamma, t \notin N, A(t)}$$

Schnitt

$$\frac{\Gamma, A \text{ und } \Gamma, \neg A}{\Gamma}$$

Für die Allquantor-Einführung und die N-freie Induktion wird vorausgesetzt, dass die Variable x nicht frei in Γ vorkommt. Für die N-freie Induktion wird zudem vorausgesetzt, dass die Formel A kein N enthält.

2.3 Einbettung von $BON^{-}+ IND$ in BON^{*}

Lemma 2.3.1. *[Aussagenlogische Vollständigkeit von BON^*]*
Für jede Formel A gilt:

$$BON^* \vdash \Gamma, A, \neg A$$

Beweis. Dies beweist man durch eine Induktion nach dem Formelaufbau:

- *Verankerung*

  Es sei A eine Atomformel. Dann ist $\Gamma, A, \neg A$ als Axiom vorhanden.

- *Induktionsschritt*

  Fall 1 Es sei $A \equiv A_0 \wedge A_1$: Folglich gilt:

  $$\neg A \equiv \neg A_0 \vee \neg A_1$$

  Die Induktionsvoraussetzung liefert für $i < 2$:

  $$BON^* \vdash \Gamma, A_i, \neg A_i$$

  Man hat somit für $i < 2$ durch Weakening:

  $$BON^* \vdash \Gamma, A_i, \neg A_0, \neg A_1$$

  Eine $\wedge$-Einführung über die A_i gefolgt von einer $\vee$-Einführung über $\neg A_0$ und $\neg A_1$ liefert das Gewünschte. Analog geht es für den Fall, dass $A \equiv A_0 \vee A_1$ gilt.

  Fall 2 Es sei $A \equiv \forall x\ B$:

  Folglich gilt:

  $$\neg A \equiv \exists x\ \neg B$$

  Man hat durch die Induktionsvoraussetzung:

  $$BON^* \vdash \Gamma, B, \neg B$$

  Die Variable x trete nicht in Γ auf. (Falls in Γ Formeln enthalten sind, welche ein freies x enthalten, werden diese für die Allquantor-Einführung weggelassen. Dies geht, weil man die Induktionsvoraussetzung für beliebige Γ anwenden kann. Danach werden die weggelassenen Formeln durch Weakening wieder hinzugefügt.)

  Durch eine Existenzquantor-Einführung gefolgt von einer Allquantor-Einführung erhält man das Gewünschte. Analog geht es für den Fall, dass $A \equiv \exists x\ A$ gilt.

□

Lemma 2.3.2. *[Oder-Spaltung in BON^*]*
Es seien A und B beliebige Formeln.

$$BON^* \vdash \Gamma, A \vee B \;\Rightarrow\; BON^* \vdash \Gamma, A, B$$

Beweis. Es gilt wegen der aussagenlogischen Vollständigkeit:

$$BON^* \vdash \Gamma, A, \neg A$$

$$BON^* \vdash \Gamma, B, \neg B$$

Hieraus folgt durch Weakening und eine $\wedge$-Einführung:

$$BON^* \vdash \Gamma, A, B, \neg A \wedge \neg B$$

Die Formel $\neg A \wedge \neg B$ entspricht per Definition der Formel $\neg(A \vee B)$. Somit erhält man durch einen Schnitt mit Hauptformel $A \vee B$ das gewünschte Resultat. (Die stärkere Aussage, dass bei der Oder-Spaltung die Herleitungslänge erhalten bleibt, kann man bei Umformulierung der N-freien Induktion beweisen.)

□

Satz 2.3.3. *[Einbettung von BON^-+ IND in BON^*]*
Es bezeichne A in der unten stehenden These einmal eine beliebige p.T. Formel und einmal eine Abkürzung für die entsprechende T.K. Formel. Es gilt:

$$BON^- + IND \vdash A \;\Rightarrow\; BON^* \vdash \Gamma, A$$

Beweis. Dies beweist man durch eine Induktion nach der Herleitungslänge der Formel A in BON^-+ IND.

- *Verankerung* : Es sei A ein Axiom von BON^-+ IND.

Fall 1 Aussagenlogische Axiome:

Hier verwendet man die aussagenlogische Vollständigkeit und $\vee$-Einführungen.

Fall 2 Definiertheitsaxiome:

Man verwendet die Totalität, Weakening und $\vee$-Einführungen.

Fall 3 Gleichheitsaxiome:

Die Tait-Style-Formulierungen aller Gleichheitsaxiome von BON^-+ IND sind in BON^* vorhanden. Durch $\vee$-Einführungen erhält man die gewünschten Formeln.

Fall 4 Quantorenaxiome:

Es bezeichne A wie schon in der These je nach Kontext eine p.T. - oder eine T.K. Formel. Ein Quantorenaxiom hat in BON^-+ IND die folgende Gestalt (ohne Abkürzungen):

$$\neg A(x/a) \vee \neg a\downarrow \vee \exists x\; A(x)$$

Es gilt wegen der aussagenlogischen Vollständigkeit:

$$BON^* \vdash \Gamma, \neg A(x/a), A(x/a)$$

Man wendet auf $A(x/a)$ eine Existenzquantor-Einführung an und erhält:

$$BON^* \vdash \Gamma, \neg A(x/a), \exists x\; A(x)$$

Durch Weakening und $\vee$-Einführungen erhält man das gewünschte Quantorenaxiom.

Fall 5 Nicht-logische Axiome ausser der N-freien Induktion:

Durch die Verwendung von Totalitätsaxiomen und $\wedge$-Einführungen auf nicht-logische Axiome von BON^* können die Entsprechungen der BON-Axiome der Typen (1) bis (4) leicht hergeleitet werden. Die Entsprechung von Axiomen des Typs (5) kann man durch eine $\vee$-, eine $\forall$- und eine $\wedge$-Einführung aus den entsprechenden nicht-logischen Axiomen von BON^* herleiten. Für den Typ (6) geht man ähnlich vor, verwendet aber zusätzlich Totalitätsaxiome um die Konjunkte $s_N x\downarrow$ und $0\downarrow$ zu erhalten. Für die Typen (7) und (9) geht man ebenfalls ähnlich vor wie für den Typ (5) und fügt die unsinnigen Disjunkte der Form $\neg t\downarrow$ durch Weakening und $\vee$-Einführungen hinzu. Die Axiome des Typs (8) erhält man durch $\vee$-Einführungen.

Fall 6 N-freie Induktion:

Es bezeichne A wieder je nach Kontext eine p.T. - oder eine T.K. Formel. Die N-freie Induktion hat in $BON^{-}+ IND$ die folgende Gestalt:

$$\neg A(0) \vee \exists x \ (x \in N \wedge A(x) \wedge \neg A(s_N x)) \vee t \notin N \vee A(t)$$

Wegen der aussagenlogischen Vollständigkeit und nach einigen $\wedge$-Einführungen erhält man:

(1) $BON^* \vdash \Gamma, A(0), \neg A(0)$

(2) $BON^* \vdash \Gamma, x \notin N, \neg A(x), A(s_N x), x \in N \wedge A(x) \wedge \neg A(s_N x)$

O.b.d.A. komme x in Γ nicht frei vor. Auf die Formel $x \in N \wedge A(x) \wedge \neg A(s_N x)$ wende man eine Existenzquantor-Einführung bzgl. der Variablen x an. Nach Anwendungen von Weakening auf (1) und (2) liefert die Schlussregel N-freie Induktion gefolgt von einigen $\vee$-Einführungen das gewünschte Resultat.

- *Induktionsschritt*

Man macht eine Fallunterscheidung nach der letzten verwendeten Schlussregel.

Fall 1 Existenzquantor-Regel:

Die verwendete Instanz sei:
$$\frac{A \to B}{\exists x \ A \to B}$$
Man hat mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung und des Lemmas 2.3.2:

$$BON^* \vdash \Gamma, \neg A, B$$

Hieraus folgt durch Allquantor- und eine $\vee$-Einführung das gewünschte Resultat.

Fall 2 $\vee$-Einführung oder $\wedge$-Einführung:

Durch die $\vee$-Einführung von $BON^{-}+ IND$ hergeleitete Formeln erhält man durch Weakening und eine $\vee$-Einführung. In BON^* ist zudem eine der $\wedge$-Einführung von $BON^{-}+ IND$ entsprechende $\wedge$-Einführung gegeben.

Fall 3 Modus Ponens:

Hier verwendet man Lemma 2.3.2 und einen Schnitt.

$\square$

2.4 Teilweise Elimination der Schnitte in BON^*

Definition 2.4.1. [Positive und negative Vorkommnisse von N]
Es sei A eine T.K. Formel.

- Ein N-Symbol kommt negativ in A vor, wenn es in einer Teilformel der Form $\neg t \in N$ von A vorkommt.
- Alle N-Symbole in A, welche nicht negativ in A vorkommen, kommen positiv in A vor.

Definition 2.4.2. [Rang]
Eine Formel A habe Rang 0, wenn A nicht gleichzeitig positive und negative Vorkommnisse von N enthält. Für alle anderen Formeln ist der Rang induktiv nach dem Formelaufbau definiert:

(1) Falls A eine Konjunktion oder Disjunktion aus A_0 und A_1 ist, so gilt $rg(A) = max(rg(A_0), rg(A_1)) + 1$.

(2) Falls A die Formel $\exists x\ B$ oder $\forall x\ B$ ist, so gilt $rg(A) = rg(B) + 1$.

Diese Rangdefinition ermöglicht es im System $BON^- + IND$ alle Schnitte ausser denen von Rang 0 zu eliminieren. Dies wäre zwar auch möglich, wenn man nur den Rang der N-freien Formeln und der Atomformeln als 0 bestimmen würde. Der Beweis der asymmetrischen Einbettung bzgl. dieser grosszügigeren Rangdefinition ermöglicht jedoch, das Einbettungsresultat später auf etwas allgemeinere Theorien zu übertragen.

Lemma 2.4.3. *Für alle Formeln gilt:* $rg(A) = m \;\Leftrightarrow\; rg(\neg A) = m$

Beweis. A und $\neg A$ haben Junktoren und Quantoren jeweils an denselben Stellen. Für jede positive/negative Atomformel von A gibt es eine negative/positive Atomformel von $\neg A$ und umgekehrt. Somit ist klar, dass für jede Teilformel A_0 von A mit $rg(A_0) = 0$ die Formel $\neg A_0$ eine Teilformel von $\neg A$ mit $rg(\neg A_0) = 0$ ist und umgekehrt. Da A und $\neg A$ aus ihren Teilformeln mit Rang 0 in gleicher Weise zusammengesetzt sind, folgt die These. □

Definition 2.4.4. [$\vdash^n_m$]
$\vdash^n_m$ sei relativ zur in 2.4.2 gegebenen Rangdefinition auf die gewöhnliche Art definiert.

Lemma 2.4.5. *Es sei t ein beliebiger Term.*

$$BON^* \vdash^k_m \Gamma, A(x) \;\Rightarrow\; BON^* \vdash^k_m \Gamma, A(t)$$

Beweis. Weil alle Axiome von BON^* sowie die Konklusion der N-freien Induktion für Terme formuliert wurden, ist dieses Lemma trivial.

□

Satz 2.4.6. *[Partielle Schnittelimination]*

$$BON^* \vdash^k_m \Gamma \;\Rightarrow\; BON^* \vdash^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^k}}}}}_1 \Gamma$$

wobei 2 *in* $2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^k}}}}$ $(m-1)$*-Mal vorkommt.*

Der zu beweisende Satz folgt direkt aus dem folgenden Hilfssatz:

Lemma 2.4.7. $BON^* \vdash^k_m \Gamma, A$ *und* $BON^* \vdash^l_m \Delta, \neg A$ *und* $rg(A) > 0 \;\Rightarrow\; BON^* \vdash^{k+l}_m \Gamma, \Delta$

Beweis. Man kann dies induktiv über die Summe der Beweislängen k und l beweisen.

Verankerung
Es sei $k = 0$ oder $l = 0$. Es sei weiter gegeben:

$$BON^* \vdash^k_m \Gamma, A$$

$$BON^* \vdash^l_m \Delta, \neg A$$

Das Antezedens des zu beweisenden Hilfssatzes liefert $rg(A) > 0$ und $rg(\neg A) > 0$. A und $\neg A$ können deshalb keine Hauptformeln eines Axioms sein. Es muss deshalb Γ oder Δ ein Axiom sein.

Induktionsschritt
Die Aussage sei bewiesen für alle k, l-Paare mit $k + l < n$. Falls A oder $\neg A$ nicht im letzten Schritt hergeleitet wurden, kann man die These folgendermassen beweisen: Es sei A nicht die Hauptformel des letzten Schritts in der Herleitung von Γ, A. (Der andere Fall geht analog.) Man schneide aus allen Prämissen Γ_i, A dieses letzten Schritts A heraus unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung. Auf die durch die Induktionsvoraussetzung garantierten Herleitungen von Γ_i, Δ kann man schliesslich die Schlussregel des letzten Schritts der Herleitung von Γ, A anwenden. Dies liefert das gewünschte Resultat.

Es seien nun A und $\neg A$ im letzten Schritt hergeleitet worden:

Fall 1 Die Schnittformel A von Rang m sei im letzten Schritt durch $\wedge$-Einführung aus A_0 und A_1 hergestellt worden. Es gelten die folgenden Aussagen:

$$BON^* \vdash^k_m \Gamma, A_0 \wedge A_1 \tag{1}$$

$$BON^* \vdash^l_m \Gamma, \neg A_0 \vee \neg A_1 \tag{2}$$

$$BON^* \vdash^{k-1}_m \Gamma, A_0 \wedge A_1, A_0 \tag{3}$$

$$BON^* \vdash^{k-1}_m \Gamma, A_0 \wedge A_1, A_1 \tag{4}$$

Die $\vee$-Einführung ist die einzige Regel, welche eine Disjunktion von Rang grösser als 0 erzeugen kann. Man hat deshalb (5) oder (6).

$$BON^* \vdash^{l-1}_m \Delta, \neg A_0 \vee \neg A_1, \neg A_0 \tag{5}$$

$$BON^* \vdash^{l-1}_m \Delta, \neg A_0 \vee \neg A_1, \neg A_1 \tag{6}$$

Man habe (5). (Falls (6) gegeben ist, geht es analog.) Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf (1) und (5) erhält man:

$$BON^* \vdash^{k+(l-1)}_m \Gamma, \Delta, \neg A_0 \tag{7}$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf (2) und (3) erhält man:

$$BON^* \vdash^{(k-1)+l}_m \Gamma, \Delta, A_0 \tag{8}$$

Ein anschliessender Schnitt von (7) und (8) liefert das Resultat.

Analog geht es für ein A, das durch $\vee$-Einführung hergeleitet wurde. Dies, weil dann $\neg A$ garantiert durch eine $\wedge$-Einführung hergeleitet wurde.

Fall 2 Die Schnittformel A von Rang m sei im letzten Schritt durch eine Allquantor-Einführung aus $B(x)$ hergestellt worden. Die Formel $\neg A$ wurde gemäss Voraussetzung im letzten Schritt eingeführt. Dies muss mittels einer Existenzquantor-Einführung geschehen sein, da m grösser als 0 ist. Es gelten die folgenden Aussagen:

$$BON^* \vdash_m^k \Gamma, \forall x\ B(x) \tag{1}$$

$$BON^* \vdash_m^l \Delta, \exists x\ \neg B(x) \tag{2}$$

$$BON^* \vdash_m^{k-1} \Gamma, \forall x\ B(x), B(u) \tag{3}$$

$$BON^* \vdash_m^{l-1} \Delta, \exists x\ \neg B(x), \neg B(t) \tag{4}$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf (1) und (4) erhält man:

$$BON^* \vdash_m^{k+(l-1)} \Gamma, \Delta, \neg B(t) \tag{5}$$

Aus Lemma 2.4.5 und (3) folgt:

$$BON^* \vdash_m^{k-1} \Gamma, \forall x\ B(x), B(t) \tag{6}$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf (2) und (6) erhält man:

$$BON^* \vdash_m^{(k-1)+l} \Gamma, \Delta, B(t) \tag{7}$$

Jetzt liefert ein Schnitt von (5) und (7) liefert das gewünschte Resultat. Falls A durch eine Existenzquantor-Einführung hergeleitet wurde, kann man die These analog beweisen. Dies, weil dann $\neg A$ garantiert durch eine Allquantor-Einführung hergeleitet wurde.

Durch die N-freie Induktion hergeleitete Schnittformeln haben Rang 0. Sie müssen deshalb nicht in einem zusätzlichen Fall beachtet werden und konnten in den vorherigen Fällen immer ausgeschlossen werden.

□

2.5 Asymmetrische Einbettung von BON^* ins Standardmodell

Definition 2.5.1. $[\tilde{\Gamma}]$
Für eine endliche Formelmenge Γ sei $\tilde{\Gamma}$ eine disjunktive Verbindung aller Formeln von Γ.

Satz 2.5.2. *[Einbettung von BON^* in $\mathcal{TM}$]*

$$BON^* \vdash \Gamma \ \Rightarrow\ \mathcal{TM} \models \tilde{\Gamma}$$

Beweis. Für jedes Axiom Γ von BON^* folgt $\tilde{\Gamma}$ aus einem entsprechenden Axiom von $BON^- + IND$ und der Totalität in der Logik der partiellen Terme. Da $\mathcal{TM}$ ein Modell von $BON^- + IND$ ist und die Totalität erfüllt, erfüllt es somit alle Axiome von BON^*. Die Schlussregeln von BON^* sind in der Logik der partiellen Terme gültig (bei Interpretation der Kommas als $\vee$). Somit gilt $\mathcal{TM} \vDash \tilde{\Gamma}$ für jedes Theorem Γ von BON^*.

□

Definition 2.5.3. $[A^n_m]$
Es seien m und n natürliche Zahlen. Die Formel A^n_m erhält man aus der Formel A, indem man zuerst alle Teilformeln der Form $t \notin N$ von A durch $\neg t < \overline{m}$ ersetzt und dann alle Teilformeln der Form $t \in N$ von A durch $t < \overline{n}$ ersetzt. Es sei $<$ hierbei die in 1.7.10 definierte Relation. (Die genau gleiche Definition findet man schon in [Can95], S. 17 und 18.)

Es folgt direkt aus der Definition ein nützliches Lemma:

Lemma 2.5.4. *Die asymmetrische Interpretation kommutiert mit Junktoren und Quantoren. D.h. es gelten (1) bis (4):*

(1) $A^k_m \ \wedge \ B^k_m \equiv (A \ \wedge \ B)^k_m$

(2) $A^k_m \ \vee \ B^k_m \equiv (A \ \vee \ B)^k_m$

(3) $\forall x \ (A(x)^k_m) \equiv (\forall x \ A(x))^k_m$

(4) $\exists x \ (A(x)^k_m) \equiv (\exists x \ A(x))^k_m$

Lemma 2.5.5. *[Persistenz]*
Es seien m_0, m_1, n_0 und n_1 natürliche Zahlen mit $m_0 \leq m_1$ und $n_0 \leq n_1$. Dann gilt:

$$\mathcal{TM} \vDash A^{n_0}_{m_1} \ \Rightarrow \ \mathcal{TM} \vDash A^{n_1}_{m_0}$$

Beweis. Man kann die These durch eine Induktion über den Formelaufbau beweisen. Für Atomformeln ist die These offensichtlich wahr. Für kompliziertere Formeln erhält man die These mit Hilfe des Lemmas 2.5.4 und der Induktionsvoraussetzung.

□

Lemma 2.5.6. *Es sei A eine Formel mit Rang 0 bzgl. der Definition 2.4.2. Es komme N in A ausschliesslich positiv vor. Es seien n_0, n_1 und n_2 natürliche Zahlen. Dann gilt:*

$$(\neg A)^{n_2}_{n_1} \equiv \neg(A^{n_1}_{n_0})$$

Beweis. Diesen Satz kann man durch eine Induktion nach dem Aufbau von A beweisen. Man nützt wie im Beweis von Lemma 2.4.3 aus, dass A und $\neg A$ dieselbe Struktur haben. Die These folgt dann für nicht-Atomformeln aus der Induktionsvoraussetzung angewendet auf die sich entsprechenden Teilformeln von A und $\neg A$ und Lemma 2.5.4.

□

Satz 2.5.7. *[Asymmetrische Interpretation von BON^*]*
Es sei $g(m,k) := m + 2^k$. Für jede natürliche Zahl m gilt:

$$BON^* \vdash_1^k \Gamma \;\Rightarrow\; \mathcal{TM} \vDash \tilde{\Gamma}_m^{g(m,k)}$$

Beweis. Man kann die These durch eine Induktion nach der Beweistiefe k beweisen.

Verankerung
Man macht eine Fallunterscheidung nach dem Typ des Axioms Γ.

Fall 1 Die Formelmenge Γ sei ein aussagenlogisches Axiom. Es gilt also $\Gamma \equiv \Delta, A, \neg A$, wobei A eine Atomformel sein muss.

Fall 1.1 A enthält kein N:

Für diesen Fall folgt die These direkt aus Satz 2.5.2, da dann $(\neg A)_m^n \equiv \neg(A_m^n)$.

Fall 1.2 A enthält ein N:

Es gilt also $A \equiv t \in N$ oder $A \equiv t \notin N$. Für jede natürliche Zahl m gilt:

$$\mathcal{TM} \vDash t < \overline{m} \vee \neg t < \overline{m}$$

Durch eine Abschwächung der gültigen Formel erhält man:

$$\mathcal{TM} \vDash t < \overline{g(m,0)} \vee \neg t < \overline{m}$$

Fall 2 Die Formelmenge Γ ist ein Totalitätsaxiom:

Aus $t\downarrow_m^n \equiv t\downarrow$ und Satz 2.5.2 folgt die These.

Fall 3 Die Formelmenge Γ ist ein Gleichheitsaxiom:

Siehe Fall 2.

Fall 4 Die Formelmenge ist ein nicht-logisches Axiom:

Heikel sind nur die N-enthaltenden Axiome der Typen (5a) bis (9), für die anderen beweist man die These wie in Fall 2. Zuerst werden die Axiome behandelt, welche den BON-Axiomen für die natürlichen Zahlen entsprechen:

(5a) $\Gamma, 0 \in N$

(5b) $\Gamma, t \notin N, s_N t \in N$

(6a) $\Gamma, t \notin N, \neg s_N t = 0$

(6b) $\Gamma, t \notin N, p_N(s_N t) = t$

(7a) $\Gamma, t = 0, t \notin N, p_N t \in N$

(7b) $\Gamma, t = 0, t \notin N, s_N(p_N t) = t$

Die These stimmt für Axiome des Typs ...

(5a), weil $\mathcal{TM} \vDash 0 < \overline{m}$ für alle m.

(5b), weil $t \approx \overline{m}$ für alle Terme t und alle m impliziert, dass $s_N t \approx \overline{m+1}$.

(6a), weil $\neg s_N t \approx 0$ für alle Terme t gilt.

(6b), weil $p_N(s_N t) \approx t$ für alle Terme t gilt.

(7a), weil $\mathcal{TM} \models t < \overline{m} \;\Rightarrow\; \mathcal{TM} \models p_N t < \overline{m}$ für alle Terme t und alle m gilt.

(7b), weil $s_N(p_N t) \approx t$ für alle Terme in N ausser denen in $[0]_\approx$ gilt.

Dass die oben beschriebenen $\approx$-Relationen in (5b) und (7b) bestehen, beweist man durch Reduzierung von t auf einen Term der Form $\overline{m}$ und die anschliessende Anwendung der Definition von $\approx$. Für (7a) geht man analog vor.

Jetzt die Axiome, welche den BON-Axiomen für die numerische Fallanalyse entsprechen:

(8) $\Gamma, v \notin N, w \notin N, v \neq w, dxyvw = x$

(9) $\Gamma, v \notin N, w \notin N, v = w, dxyvw = y$

Für jede natürliche Zahl m ist die Formel

$$\neg v < \overline{m} \vee \neg u < \overline{m} \vee v \neq u \vee dxyuv = x$$

eine Abschwächung der in $\mathcal{TM}$ gültigen Formel

$$v \notin N \vee u \notin N \vee v \neq u \vee dxyuv = x$$

Somit stimmt die These für Axiome des Typs (8). Analog geht es für den Typ (9).

Induktionsschritt
Man bringt $g(m,k) := m + 2^k$ in die Form einer rekursiv definierten Funktion. Eine einfache Induktion nach k beweist, dass $g(m,k)$ durch die folgenden Bedingungen charakterisiert werden kann:

- $g(m,0) = m+1$
- $g(m,k+1) = g(g(m,k),k)$

Es sei nun $g(m,k)$ eine Grenze für positive Vorkommnisse von N in allen Herleitungen einer Länge kleiner oder gleich k. Es ist zu beweisen, dass $g(g(m,k),k)$ eine Grenze für positive Vorkommnisse von N in allen Herleitungen der Länge $k+1$ ist.
Es sollen in allen Fällen der Fallunterscheidung durchwegs die trivialen Unterfälle weggelassen werden, in denen $\mathcal{TM}$ für das vorgegebene m bereits die asymmetrische Interpretation einer der Nebenformeln erfüllt. Wenn nämlich $\mathcal{TM}$ die asymmetrische Interpretation einer Nebenformel mit positiver N-Grenze $g(m,k)$ erfüllt, so erfüllt es wegen Lemma 2.5.5 auch die durch eine grössere positive N-Grenze beschränkte Nebenformel.

Fall 1 Der letzte Schritt sei eine N-freie Induktion:

Im nicht-trivialen Fall sind also die asymmetrischen Interpretationen der Prämissen der N-freien Induktion in $\mathcal{TM}$ gültig. Man hat für eine N-freie Formel A:

- $\mathcal{TM} \models A(0)$
- $\mathcal{TM} \models \neg x < \overline{m} \vee \neg A(x) \vee A(s_N x)$

Die Formelinduktion ist über alle Anfangsstücke von $N^{\mathcal{TM}}$ erfüllt. Deshalb gilt:

- $\mathcal{TM} \models \neg t < \overline{m} \vee A(t)$

Fall 2 Der letzte Schritt sei eine Junktor- oder Quantor-Einführung:

Exemplarisch wird dies für die Existenzquantor-Einführung bewiesen, für die anderen Einführungen funktioniert es analog. Gegeben sei also:

$$BON^* \vdash_1^k \Gamma, A(t)$$

Im nicht trivialen Fall folgt aus der Induktionsvoraussetzung:

$$\mathcal{TM} \models A(t)_m^{g(m,k)}$$

Es gilt in $\mathcal{TM}$ also auch:

$$\mathcal{TM} \models \exists x \ (A(x)_m^{g(m,k)})$$

Unter Verwendung des Lemmas 2.5.4 folgt:

$$\mathcal{TM} \models (\exists x \ A(x))_m^{g(m,k)}$$

Fall 3 Der letzte Schritt sei ein Schnitt:

Der Schnitt habe die folgende Form:

$$\frac{\Gamma, A \text{ und } \Gamma, \neg A}{\Gamma}$$

Es sei A die Hauptformel mit Rang 0, welche nur positive Vorkommnisse von N enthält. (Es geht analog für den umgekehrten Fall.)

Durch die Induktionsvoraussetzung hat man:

$$\mathcal{TM} \models \tilde{\Gamma}_m^{g(m,k)} \vee A_m^{g(m,k)}$$

$$\mathcal{TM} \models \tilde{\Gamma}_{g(m,k)}^{g(g(m,k),k)} \vee (\neg A)_{g(m,k)}^{g(g(m,k),k)}$$

$\mathcal{TM}$ muss wegen Lemma 2.5.6 eine Formel aus einer der beiden folgenden Disjunktionen erfüllen:

$$\tilde{\Gamma}_{g(m,k)}^{g(g(m,k),k)}$$

$$\tilde{\Gamma}_m^{g(m,k)}$$

Wegen Lemma 2.5.5 muss daher gelten:

$$\mathcal{TM} \models \tilde{\Gamma}_m^{g(g(m,k),k)}$$

□

Der soeben bewiesene Satz kann noch etwas verallgemeinert werden. Mit der in den Abschnitten 2.4 und 2.5 vorgeführten Vorgehensweise kann man problemlos den folgenden Satz beweisen:

Satz 2.5.8. *[Hinzufügung neuer Axiome]*
Es werde BON^* durch das Axiom $\Gamma, A_0, \cdots, A_n$ ergänzt für alle Formelmengen Γ. Die neue Theorie heisse BON^*+. Es sei $\hat{g} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Es gelte für alle m und k: $\hat{g}(m, 0) > m$ und $\hat{g}(m, k+1) \geq \hat{g}(\hat{g}(m, k), k)$. Es gelten zudem die folgenden Bedingungen:

(B1) $\mathcal{TM} \vDash (A_0 \vee \cdots \vee A_n)_m^{\hat{g}(m,0)}$ *für alle m.*

(B2) Alle Formeln A_i haben den Rang 0 nach der Rangdefinition 2.4.2.

Dann gilt:

(1) Alle Theoreme von BON^*+ können unter ausschliesslicher Verwendung von Schnitten des Rangs 0 hergeleitet werden.

(2) $BON^*+ \vdash_1^k \Gamma \;\Rightarrow\; \mathcal{TM} \vDash \tilde{\Gamma}_m^{\hat{g}(m,k)}$

2.6 Einschränkung der in $BON^-+\ IND$ beweisbar totalen Funktionen

Mit Hilfe des Hauptresultats des letzten Abschnitts wird in diesem Abschnitt bewiesen, dass in $BON^-+\ IND$ beweisbar totale Funktion ein sehr schwaches Wachstum in ihren Argumenten haben.

Definition 2.6.1. [Beweisbar totale Funktion]
Es sei f eine beliebige Funktion von $\mathbb{N}^{m+1}$ nach $\mathbb{N}$. Es sei $\mathbf{T}$ eine applikative Theorie, für die $\mathcal{TM}$ ein Modell ist. f ist genau dann beweisbar total in $\mathbf{T}$, wenn es einen geschlossenen Term t_f gibt, so dass gilt:

(A) $\mathbf{T} \vdash x_0 \in N \wedge \cdots \wedge x_m \in N \to t_f x_0 \cdots x_m \in N$

(B) $\mathcal{TM} \vDash t_f \overline{n_0} \cdots \overline{n_m} = \overline{f(n_0, \cdots, n_m)}$ für alle $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$

Satz 2.6.2. *[Hauptsatz]*
Für eine in $BON^-+\ IND$ beweisbar totale Funktion $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, alle $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ und eine von f abhängige Konstante c_f gilt:

$$f(n_0, \cdots, n_{m-1}) < max(n_i \mid i < m) + c_f$$

Beweis. Man hat gemäss Voraussetzung:

$$BON^-+\ IND \vdash x_0 \in N \wedge \cdots \wedge x_n \in N \to t_f x_0 \cdots x_n \in N \tag{1}$$

Man kann $BON^-+\ IND$ in BON^* einbetten (siehe Satz 2.3.3). Zudem kann man Schnitte in der Herleitung der (Entsprechung der) Formel aus (1) eliminieren (siehe Satz 2.4.6). Aus diesen beiden Fakten und Lemma 2.3.2 folgt für ein $k \in \mathbb{N}$:

$$BON^* \vdash_1^k x_0 \notin N, \cdots, x_n \notin N, t_f x_0 \cdots x_n \in N$$

Wegen der asymmetrischen Einbettung von BON^* in $\mathcal{TM}$ (siehe Satz 2.5.7) hat man für beliebige $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{TM} \models x_0 < \overline{m} \wedge \cdots \wedge x_n < \overline{m} \rightarrow t_f x_0 \cdots x_n < \overline{m + 2^k}$$

Die These folgt nun direkt aus der Bedingung (B) in der Definition der beweisbaren Totalität.

□

Im Gegensatz zur oben angegebenen Definition von beweisbarer Totalität, könnte man diesen Begriff auch weniger strikt interpretieren. Eine schwächere Interpretation ist die Folgende:

Definition 2.6.3. [Punktweise beweisbar totale Funktion]
Es sei f eine Funktion von $\mathbb{N}^m$ nach $\mathbb{N}$. Es sei $\mathbf{T}$ eine applikative Theorie der Sprache L, für welche $\mathcal{TM}$ ein Modell ist. f ist genau dann punktweise beweisbar total in $\mathbf{T}$, wenn es einen geschlossenen Term t_f gibt, so dass gilt:

(A) $\mathbf{T} \vdash t_f \overline{n_0} \cdots \overline{n_{m-1}} \in N$ für alle $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$

(B) $\mathcal{TM} \models t_f \overline{n_0} \cdots \overline{n_{m-1}} = \overline{f(n_0, \cdots, n_{m-1})}$ für alle $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$

Es ist leicht zu sehen, dass bzgl. dieser punktweisen Definition von „beweisbar total“ aus dem Hauptresultat des letzten Abschnitts (Satz 2.5.7) keine Einschränkung der beweisbar totalen Funktionen von $BON^- + IND$ folgt. (Man bräuchte hierzu ein k, welches simultan für alle Vektoren natürlicher Zahlen funktionieren würde.) Es kann noch dazu bewiesen werden, dass schon in $BON^- + IND$ ohne das Induktionsschema jede rekursive Funktion punktweise beweisbar total ist. Um interessante Einschränkungen der beweisbar totalen Funktionen zu erhalten, muss man also immer von der stärkeren Definition ausgehen.

2.7 Beweis des Hauptresultats mit abgeändertem Vorgehen

Eine asymmetrische Interpretation des N-Prädikats für die Theorie $BON^- + IND$ kann man auch erreichen, wenn statt des Termmodells das Modell der rekursiven Funktionen verwendet wird. (Eine Definition dieses Modells findet man in [Jäg96], S. 24 und 25.) Das Vorgehen für diesen Fall wird skizziert und mit dem in den Abschnitten 2.4 und 2.5 ausgeführten verglichen.

2.7.1 Die Einbettungsthese

Die neue These lautet ähnlich wie die Alte:

$$BON^{**} \vdash_1^k \Gamma \;\Rightarrow\; \mathcal{RFM} \models \tilde{\Gamma}_m^{g(m,k)}$$

Hierbei wird BON^* durch das Tait-Style-System BON^{**} ersetzt, welches in Kürze definiert wird. Mit $\mathcal{RFM}$ wird das Modell der rekursiven Funktionen bezeichnet. Als Relation $<$ für die asymmetrische Interpretation wird neu die Kleiner-Relation auf den natürlichen Zahlen verwendet. $g(m, k)$ bleibt unverändert als $m + 2^k$ definiert. Teilformeln der Form $t \in N$ werden in $\tilde{\Gamma}$ durch $t < g(m, k)$ ersetzt, Teilformel der Form $t \notin N$ werden durch $\neg t < m$ ersetzt. Die restlichen Zeichen der These bedeuten dasselbe wie zuvor.

2.7.2 Das System BON^{**}

BON^{**} ist ein Tait-Style-Kalkül. Die Sprache von BON^{**} ist L erweitert um $\wedge$ und $\forall$. Die Terme von BON^{**} sind in Definition 1.1.2 definiert. Die Formeln von BON^{**} sind Tait-Kalkül-Formeln (siehe Definition 2.2.1).

Logische Axiome von BON^{**}

- Für alle Atomformeln A sei $\Gamma, A, \neg A$ ein Axiom von BON^{**}.
- BON^{**} enthalte die Tait-Style-Formulierungen der Definiertheitsaxiome von $BON^{-}+ IND$.
- BON^{**} enthalte die Tait-Style-Formulierungen der Gleichheitsaxiome von $BON^{-}+ IND$. Es sei zudem das Axiom $\Gamma, t = t, \neg t\downarrow$ für jeden Term t und jedes Γ vorhanden.

Nicht-logische Axiome von BON^{**}

Wie für BON^{*} werden die Axiome so formuliert, dass ihre Hauptformeln Atomformel sind. BON^{**} enthalte Tait-Style-Entsprechungen aller nicht-logischen Axiome von $BON^{-}+ IND$ ausser der Axiome der Form des Induktionsschemas. Für jedes dieser BON^{**}-Axiome der Form $\Gamma[\vec{x}]$ enthalte BON^{**} zusätzlich das Axiom $\Gamma[\vec{t}], \neg\vec{t}\downarrow$. Hierbei bezeichne $\neg\vec{t}\downarrow$ die Formelmenge $\neg t_0\downarrow, \cdots, \neg t_n\downarrow$. (In $\neg\vec{t}\downarrow$ sollen Formeln der Form $\neg x\downarrow$ weggelassen werden.) Diese Axiome haben den Typ des $BON^{-}+ IND$-Axioms, welchem $\Gamma[\vec{x}]$ entspricht.
Somit ist der einzige Unterschied zwischen den nicht-logischen Axiomen von BON^{**} und denen von BON^{*}, dass die nicht-logischen Axiome von BON^{**} einige zusätzliche Formeln der Form $\neg t\downarrow$ enthalten.

Schlussregeln von BON^{**}

Diese entsprechen den Schlussregeln von BON^{*} ausser im Fall der Existenzquantor-Einführung. Für BON^{**} muss die partielle-Terme-Version davon verwendet werden:

$$\frac{\Gamma, A(x/t) \text{ und } \Gamma, t\downarrow}{\Gamma, \exists x\ A(x)}$$

2.7.3 Einbettung von $BON^{-}+ IND$ in BON^{**}

Für beliebige Formelmengen Γ gilt:

$$BON^{-}+ IND \vdash A \;\Rightarrow\; BON^{**} \vdash \Gamma, A$$

Der Beweis funktioniert weitgehend analog wie der Einbettungsbeweis von $BON^{-}+ IND$ in BON^{*} (siehe Abschnitt 2.3).

2.7.4 Schnittelimination

Die partielle-Terme-Version der Existenzquantor-Einführung erzwingt eine schlechtere Beschränkung der Länge der quasi-schnittfreien Herleitungen. Es gilt:

$$BON^{**} \vdash_m^k \Gamma \Rightarrow BON^{**} \vdash_1^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4^k}}}}} \Gamma$$

wobei 4 in $4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4^k}}}}$ $m-1$-Mal vorkommt.
Dies beweist man unter Verwendung des folgenden Hilfssatzes:

$BON^* \vdash_m^k \Gamma, A$ und $BON^* \vdash_m^l \Delta, \neg A$ und $rg(A) > 0$ impliziert $BON^* \vdash_m^{2(k+l)} \Gamma, \Delta$

Der Beweis dieses Hilfssatzes funktioniert genau gleich wie der Beweis des entsprechenden Hilfssatzes für BON^* (siehe Abschnitt 2.4) ausser, wenn die Hauptformeln des Schnitts mittels Quantor-Einführung hergeleitet wurden. Dieser Fall wird deshalb ausgeführt:
Die Schnittformel A vom Rang $m > 0$ sei im letzten Schritt durch eine Allquantor-Einführung aus $B(x)$ hergestellt worden und auch $\neg A$ sei im letzten Schritt hergeleitet worden. Dies muss mittels einer Existenzquantor-Einführung geschehen sein. Es gelten also die folgenden Aussagen:

$$BON^{**} \vdash_m^k \Gamma, \forall x\ B(x) \tag{1}$$

$$BON^{**} \vdash_m^l \Delta, \exists x\ \neg B(x) \tag{2}$$

$$BON^{**} \vdash_m^{k-1} \Gamma, \forall x\ B(x), B(u) \tag{3}$$

$$BON^{**} \vdash_m^{l-1} \Delta, \exists x\ \neg B(x), \neg B(t) \tag{4}$$

$$BON^{**} \vdash_m^{l-1} \Delta, \exists x\ \neg B(x), t\downarrow \tag{5}$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf (1) und (4) erhält man:

$$BON^{**} \vdash_m^{2(k+(l-1))} \Gamma, \Delta, \neg B(t) \tag{6}$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf (1) und (5) erhält man:

$$BON^{**} \vdash_m^{2(k+(l-1))} \Gamma, \Delta, t\downarrow \tag{7}$$

Weil in BON^{**} alle Axiome und die N-freie Induktion für Terme formuliert sind, gilt:

$$BON^{**} \vdash_m^n \Gamma, A[\vec{x}] \;\Rightarrow\; BON^{**} \vdash_m^n \Gamma, A[\vec{t}], \neg\vec{t}\downarrow$$

Es folgt deshalb aus (3):

$$BON^{**} \vdash_m^{k-1} \Gamma, \forall x\ B(x), B(t), \neg t\downarrow \tag{8}$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf (2) und (8) erhält man:

$$BON^{**} \vdash_m^{2((k-1)+l)} \Gamma, \Delta, B(t), \neg t\downarrow \tag{9}$$

Man schneidet (6) mit (9) und erhält:

$$BON^{**} \vdash_m^{2(k+l)-1} \Gamma, \Delta, \neg t\downarrow \tag{10}$$

Man schneidet (7) mit (10) und erhält:

$$BON^{**} \vdash_m^{2(k+l)} \Gamma, \Delta \tag{11}$$

2.7.5 Beweis der Einbettungsthese

N-freie Axiome

Es ist einfach zu sehen, dass für beliebige Formelmengen Γ gilt:

$$BON^{**} \vdash \Gamma \;\Rightarrow\; \mathcal{RFM} \vDash \tilde{\Gamma}$$

(Siehe Definition von $\tilde{\Gamma}$ in 2.5.1.) Dies trivialisiert die Gültigkeit der asymmetrischen Interpretationen von N-losen BON^{**}-Theoremen in $\mathcal{RFM}$.

Logische Axiome

Für die aussagenlogischen - und Gleichheitsaxiome geht man genau wie für BON^* vor. Die Definiertheitsaxiome D1 bis D3 enthalten in den Hauptformeln kein N. Die Einbettungsthese ist deshalb für diese Fälle trivial. Für D4 gilt die These wegen:

$$\mathcal{RFM} \vDash t < m \to t\downarrow$$

Nicht-logische Axiome

Die Axiome des Typs (1) bis (4) enthalten kein N. Die Einbettungsthese ist deshalb für diese Fälle trivial. Man beweist die These für die Axiome der Typen (5) bis (9) ähnlich wie für BON^* (siehe Seite 23).

Konklusion von Schlussregeln

Ich führe hier nur die Existenzquantor-Einführung vor, da der Beweis der These für alle anderen Regeln genau so funktioniert wie für BON^* (siehe Seite 24). Gegeben sei:

$$BON^{**} \vdash_1^k \Gamma, A(t)$$

$$BON^{**} \vdash_1^k \Gamma, t\downarrow$$

Im nicht trivialen Fall hat man deshalb mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung:

$$\mathcal{RFM} \vDash A(t)_m^{g(m,k)} \tag{1}$$

$$\mathcal{RFM} \vDash t\downarrow \tag{2}$$

Es folgt aus (1) und (2) und der Definition von partiellen L-Strukturen:

$$\mathcal{RFM} \vDash \exists x \; (A(x)_m^{g(m,k)}) \tag{3}$$

Wegen des Kommutierens zwischen Quantoren und der asymmetrischen Interpretation folgt das gewünschte Resultat. Entscheidend für das Funktionieren des Induktionsschritts in diesem Fall ist, dass $(t\downarrow)_m^n \equiv t\downarrow$ gilt.
Es gibt somit eine asymmetrische Einbettung von BON^{**} ins Modell der rekursiven Funktionen, welche zur in Abschnitt 2.5 vorgeführten Einbettung analog ist. Aus dieser Einbettung folgt dieselbe Einschränkung der in $BON^{-}+ IND$ beweisbar totalen Funktionen wie in Abschnitt 2.6.

2.7.6 Vergleich der beiden Vorgehensweisen

Das Termmodell ist zur Einschränkung der in $BON^{-} + IND$ beweisbar totalen Funktionen besser geeignet als das Modell der rekursiven Funktionen. Dies aus den folgenden beiden Gründen:

1. Die Formulierung der Axiome für Terme ist in BON^{*} etwas unkomplizierter als in BON^{**}. (Sogar wenn redundante Formeln der Form $\neg t\downarrow$ entfernt würden.)

2. Es können die normalen logischen Schlussregeln verwendet werden, was die Schnittelimination vereinfacht und eine bessere Abschätzung der Länge der quasi-schnittfreien Herleitungen ermöglicht.

Kapitel 3

Realisierung der positiven Theoreme von $BON^- + posIND$

3.1 Ziel und Strategie

Im Kapitel zwei dieser Arbeit wurde bewiesen, dass die in $BON^- + IND$ beweisbar totalen Funktionen ein sehr schwaches Wachstumsverhalten haben. Dieses Resultat schliesst aus, dass in $BON^- + IND$ die Totalität aller primitiv rekursiven Funktionen bewiesen werden kann. Es schliesst aber nicht aus, dass die Totalität von sehr komplizierten, insbesondere nicht primitiv rekursiven Funktionen in $BON^- + IND$ bewiesen werden kann. Diese Lücke soll in diesem Kapitel wenigstens für das etwas schwächere System $BON^- + posIND$ gestopft werden. In analoger Weise zu [Str03] wird bewiesen, dass $BON^- + posIND$ höchstens die Totalität von Funktionen der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 beweisen kann.
Die Strategie ist $BON^- + posIND$ in ein totales Sequenzenkalkül bon^* einzubetten. Für jede in bon^* herleitbare $\neg$-freie Sequenz der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$ soll eine Funktion f der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 gefunden werden. Diese Funktion wird so konstruiert, dass sie den Realisierern (oder Zeugen) der Formeln von Γ einen Realisierer von Δ zuordnet. Daraus, dass alle Realisierungsfunktionen in der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 sind, folgt ziemlich direkt, dass dies auch auf die in bon^* beweisbar totalen Funktionen zutrifft. Durch das Ausnützen der Einbettbarkeit von $BON^- + posIND$ in bon^* kann die Menge der in $BON^- + posIND$ beweisbar totalen Funktionen dann gleichermassen eingeschränkt werden.
Das Finden einer Realisierungsfunktion für $\neg$-freie Sequenzen bedingt, dass diese nur mit Hilfe von $\neg$-freien Sequenzen hergeleitet werden können. Deshalb ist eine Elimination der Schnitte mit $\neg$-enthaltenden Hauptformeln nötig. Dies wird durch die $\neg$-freie Formulierung der nicht-logischen Axiome und Schlussregeln von bon^* erreicht.

3.2 Das System bon^*

3.2.1 Terme, Formeln und Bezeichnungen in bon^*

Definition 3.2.1. [Sequenzen]
Eine Sequenz besteht aus einer linken und einer rechten Formelfolge, welche durch das Symbol $\Rightarrow$ getrennt werden. Sequenzen werden mit $\Gamma \Rightarrow \Delta$ bezeichnet.

bon^* ist ein Sequenzenkalkül, d.h. die Axiome und Schlussregeln von bon^* sind für Sequenzen formuliert. Die Sprache von bon^* ist L erweitert um $\wedge$ und $\forall$. Die Terme von bon^* sind in Definition 1.1.2 definiert. Die Formeln von bon^* sind Sequenzenkalkül-Formeln und sind durch die folgende Definition gegeben:

Definition 3.2.2. [Sequenzenkalkül-Formel]
Sequenzenkalkül-Formeln (S.K. Formeln) sind Formeln der Sprache L erweitert um $\wedge$ und $\forall$. Sie lassen sich induktiv über den Formelaufbau definieren unter Voraussetzung der Definition von Term. A sei eine S.K. Formel genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $A \equiv t_1 = t_2$, wobei t_1 und t_2 Terme sind.

(2) $A \equiv N(t)$, wobei t ein Term ist.

(3) $A \equiv t\downarrow$, wobei t ein Term ist.

(4) $A \equiv \neg B$, wobei B eine S.K. Formel ist.

(5) $A \equiv A_0 \vee A_1$, wobei A_0 und A_1 S.K. Formeln sind.

(6) $A \equiv A_0 \wedge A_1$, wobei A_0 und A_1 S.K. Formeln sind.

(7) $A \equiv \exists x\ B$, wobei B eine S.K. Formel und x eine Variable der Sprache L ist.

(8) $A \equiv \forall x\ B$, wobei B eine S.K. Formel und x eine Variable der Sprache L ist.

Im ganzen Kapitel drei wird mit dem Begriff „Formel“ stets eine S.K. Formel bezeichnet. Formeln, welche (1), (2) oder (3) erfüllen werden als S.K. Atomformeln bezeichnet. Im ganzen Kapitel drei wird mit dem Begriff „Atomformel“ stets eine S.K. Atomformel bezeichnet.

3.2.2 Die Axiome von bon^*

In diesem Kapitel und in Kapitel vier bezeichnen Γ und Δ stets beliebige Formelfolgen ausser, wenn es anders bestimmt wird.

Logische Axiome von bon^*

(1) Für jede Atomformel A sei $\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$ ein Axiom von bon^*.

(2) Es seien die folgenden Gleichheitsaxiome vorhanden:

E1 $\Gamma \Rightarrow t = t, \Delta$

E2 $\Gamma, s = t \Rightarrow t = s, \Delta$

E3 $\Gamma, s = t, t = u \Rightarrow s = u, \Delta$

E4 $\Gamma, s \in N, s = t \Rightarrow t \in N, \Delta$

E5 $\Gamma, s_0 = t_0, s_1 = t_1 \Rightarrow s_0 t_0 = s_1 t_1, \Delta$

Nicht-logische Axiome

Im System bon^* gelte Totalität. Deshalb sei das Axiom $\Gamma \Rightarrow t\downarrow, \Delta$ für jeden Term t vorhanden. Die restlichen nicht-logischen Axiome von bon^* sind:

(1) $\Gamma \Rightarrow kt_0t_1 = t_0, \Delta$

(2) $\Gamma \Rightarrow st_0t_1t_2 = (t_0t_2)(t_1t_2), \Delta$

(4a) $\Gamma \Rightarrow p_0{<}t_0, t_1{>} = t_0, \Delta$

(4b) $\Gamma \Rightarrow p_1{<}t_0, t_1{>} = t_1, \Delta$

(5b) $\Gamma, t \in N \Rightarrow s_N t \in N, \Delta$

(6a) $\Gamma, t \in N, s_N t = 0 \Rightarrow \Delta$

(6b) $\Gamma, t \in N \Rightarrow p_N(s_N t) = t, \Delta$

(7a) $\Gamma, t \in N \Rightarrow t = 0, p_N t \in N, \Delta$

(7b) $\Gamma, t \in N \Rightarrow t = 0, s_N(p_N t) = t, \Delta$

(8) $\Gamma, t_2 \in N, t_3 \in N, t_2 = t_3 \Rightarrow dt_0t_1t_2t_3 = t_0, \Delta$

(9) $\Gamma, t_2 \in N, t_3 \in N \Rightarrow t_2 = t_3, dt_0t_1t_2t_3 = t_1, \Delta$

3.2.3 Die Schlussregeln von bon^*

- Man nehme die gewöhnlichen Regeln für einen prädikatenlogischen Sequenzenkalkül (ohne $\rightarrow$).
- Γ und Δ enthalten kein x. Man nehme die positive N-freie Induktion in der folgenden Form, wobei A eine $\neg$ und N-freie Formel sei:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A(0), \Delta \text{ und } \Gamma, x \in N, A(x) \Rightarrow A(s_N x), \Delta}{\Gamma, t \in N \Rightarrow A(t), \Delta}$$

3.3 Einbettung von $BON^- + posIND$ in bon^*

Die folgenden drei Lemmas beruhen auf Standardresultaten für den prädikatenlogischen Sequenzenkalkül:

Lemma 3.3.1. *[Aussagenlogische Vollständigkeit von bon^*]*
Für jede Formel A gilt:

$$bon^* \vdash \Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$$

Lemma 3.3.2. *[Äquivalenz von Formeln]*
Die Umkehrung der Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist die Sequenz $\Delta \Rightarrow \Gamma$. Die folgenden Sequenzen und ihre Umkehrungen sind in bon^* beweisbar:

(1) $\Gamma, \neg(\neg A) \Rightarrow A, \Delta$

(2) $\Gamma, \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B, \Delta$

(3) $\Gamma, \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B, \Delta$

(4) $\Gamma, \neg\exists x\ A(x) \Rightarrow \forall x\ \neg A(x), \Delta$

(5) $\Gamma, \neg\forall x\ A(x) \Rightarrow \exists x\ \neg A(x), \Delta$

Lemma 3.3.3. *[Oder-Spaltung in bon^*]*
Es seien A und B beliebige Formeln.

$$bon^* \vdash \Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta \ \ \textit{impliziert} \ \ bon^* \vdash \Gamma \Rightarrow A, B, \Delta$$

Lemma 3.3.4. *[Äquivalente Formeln zu positiven und negativen p.T. Formeln]*

(1) Es sei A eine positive p.T. Formel (siehe Definitionen 1.5.1 und 1.6.2). Dann gibt es eine $\neg$-freie S.K. Formel $\tilde{A}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$bon^* \vdash \Gamma, A \Rightarrow \tilde{A}, \Delta$$

$$bon^* \vdash \Gamma, \tilde{A} \Rightarrow A, \Delta$$

(2) Es sei A eine negative p.T. Formel. Dann gibt es eine $\neg$-freie S.K. Formel $\tilde{A}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$bon^* \vdash \Gamma, A \Rightarrow \neg\tilde{A}, \Delta$$

$$bon^* \vdash \Gamma, \neg\tilde{A} \Rightarrow A, \Delta$$

Beweis. Dieses Lemma beweist man induktiv nach dem Formelaufbau. Um die These (1) oder (2) für eine bestimmte Komplexitätsstufe zu beweisen, werden die Thesen (1) und (2) auf niedrigeren Komplexitätsstufen vorausgesetzt. Die These folgt mit diesem Vorgehen und Lemma 3.3.2 problemlos. □

Satz 3.3.5. *[Einbettung von BON^-+ $posIND$ in bon^*]*
Es bezeichne A eine beliebige p.T. Formel. Es gilt:

$$BON^- + posIND \vdash A \ \Rightarrow \ BON^* \vdash \Gamma \Rightarrow A, \Delta$$

Beweis. Die These wird durch eine Induktion nach der Herleitungslänge des Theorems in BON^-+ $posIND$ bewiesen.

Verankerung
Für alle Axiome von BON^-+ $posIND$ ausser denen des Typs der positiven N-freien Induktion kann die These leicht nachgeprüft werden. Für die positive N-freie Induktion geht man folgendermassen vor:
Es sei A die Hauptformel des Induktionsaxioms von BON^-+ $posIND$. Lemma 3.3.4 liefert ein in bon^* äquivalentes, $\neg$-freies $\tilde{A}$. Wegen der aussagenlogischen Vollständigkeit und nach einer $\wedge$-Einführung erhält man:

$$\Gamma, \tilde{A}(0) \Rightarrow \tilde{A}(0), \Delta \tag{1}$$

$$\Gamma, x \in N, \tilde{A}(x) \Rightarrow x \in N \wedge \tilde{A}(x), \Delta \tag{2}$$

Man hat ebenfalls wegen der aussagenlogischen Vollständigkeit und der $\neg$-Regel:

$$\Gamma, x \in N, \tilde{A}(x) \Rightarrow \tilde{A}(s_N x), \neg\tilde{A}(s_N x), \Delta \tag{3}$$

Durch eine $\wedge$-Einführung auf (2) und (3) angewendet erhält man:

$$\Gamma, x \in N, \tilde{A}(x) \Rightarrow \tilde{A}(s_N x), x \in N \wedge \tilde{A}(x) \wedge \neg\tilde{A}(s_N x), \Delta \tag{4}$$

Durch eine Existenzquantor-Einführung auf (4) angewendet erhält man:

$$\Gamma, x \in N, \tilde{A}(x) \Rightarrow \tilde{A}(s_N x), \exists x\ (x \in N \wedge \tilde{A}(x) \wedge \neg\tilde{A}(s_N x)), \Delta \tag{5}$$

Durch Anwendung der positiven N-freien Induktion auf (1) und (5) gefolgt von Anwendungen der $\neg$-Regel und der $\vee$-Einführung erhält man:

$$\Gamma, t \in N \Rightarrow \tilde{A}(t), \Delta \tag{6}$$

Weil in *bon** $\tilde{A}$ und A äquivalent sind, folgt hieraus die These.

Induktionsschritt
Man macht eine Fallunterscheidung nach der letzten verwendeten Schlussregel.

Fall 1 Existenzquantor-Regel:

Die verwendete Instanz sei:
$$\frac{A \rightarrow B}{\exists x\ A \rightarrow B}$$
Man hat mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung:

$$bon^* \vdash \Gamma \Rightarrow \neg A \vee B, \Delta$$

Mit Hilfe der $\neg$-Regel, Lemma 3.3.2, Lemma 3.3.3 und einer Existenzquantor-Einführung links folgt das gewünschte Resultat.

Fall 2 $\vee$-Einführung und $\wedge$-Einführung:

Durch die $\vee$-Einführung von $BON^- + posIND$ hergeleitete Formeln erhält man durch Weakening und eine $\vee$-Einführung. In *bon** ist zudem eine der $\wedge$-Einführung von $BON^- + posIND$ entsprechende $\wedge$-Einführung gegeben.

Fall 3 Modus Ponens:

Man verwendet Lemma 3.3.2, Lemma 3.3.3 und einen Schnitt.

□

3.4 Teilweise Elimination der Schnitte in bon^*

Im System bon^* kann man durch Standardtechniken alle Schnitte, deren Hauptformel ein $\neg$ enthält, eliminieren. Dies aus den folgenden Gründen:

- Die Hauptformeln aller Axiome und der positiven N-freien Induktion sind $\neg$-frei.
- Alle Axiome und die positive N-freie Induktion sind für Terme formuliert.

Aus der Elimination von Schnitten mit $\neg$-enthaltenden Hauptformeln folgt sofort, dass ausschliesslich aus $\neg$-freien Formeln bestehende Sequenzen mit Hilfe ausschliesslich aus $\neg$-freien Formeln bestehender Sequenzen hergeleitet werden können.

3.5 Die Realisierungsrelation

Definition 3.5.1. [$<n, m>_{\mathbb{N}}$]
$<,>_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bezeichnet die Cantorsche Paarungsfunktion. Es gilt also:

$$<n, m>_{\mathbb{N}} \;:=\; \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$$

Der Index $\mathbb{N}$ dient zur Unterscheidung von $<t_0, t_1>$, welches als Abkürzung für den Term $App(App(p, t_0), t_1)$ verwendet wird. Mit π_i für $i < 2$ werden die zu $<n, m>_{\mathbb{N}}$ assoziierten Projektionsfunktionen bezeichnet.

Diese Paarungsfunktion wird verwendet, da sie in ihren Argumenten nur langsam wächst. Da die Addition und die Multiplikation in der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 sind, trifft dies auch auf die Cantorsche Paarungsfunktion zu. Auch die assoziierten Projektionsfunktionen sind in der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2.

Definition 3.5.2. [Die Realisierungsrelation]
Die Relation „Realisierung“, welche mit $\mathbf{r}$ bezeichnet wird, sei eine Relation zwischen natürlichen Zahlen und Formeln. Die definierenden Eigenschaften sind:

$$\begin{array}{lll}
n\ \mathbf{r}\ t_0 = t_1 & :\Leftrightarrow & \mathcal{TM} \models t_0 = t_1 \text{ und } n = 0. \\
n\ \mathbf{r}\ t \in N & :\Leftrightarrow & \mathcal{TM} \models t = \overline{n}. \\
n\ \mathbf{r}\ t{\downarrow} & :\Leftrightarrow & n = 0. \\
n\ \mathbf{r}\ A \wedge B & :\Leftrightarrow & n = <n_0, n_1>_{\mathbb{N}} \text{ und } n_0\ \mathbf{r}\ A \text{ und } n_1\ \mathbf{r}\ B. \\
n\ \mathbf{r}\ A \vee B & :\Leftrightarrow & n = <0, n_0>_{\mathbb{N}} \text{ und } n_0\ \mathbf{r}\ A \text{ oder} \\
 & & n = <1, n_0>_{\mathbb{N}} \text{ und } n_0\ \mathbf{r}\ B. \\
n\ \mathbf{r}\ \exists x\ A(x) & :\Leftrightarrow & n\ \mathbf{r}\ A(t) \text{ für einen beliebigen Term } t. \\
n\ \mathbf{r}\ \forall x\ A(x) & :\Leftrightarrow & n\ \mathbf{r}\ A(u) \text{ für eine frische Variable } u.
\end{array}$$

Von dieser Definition ausgehend kann man die Realisierungsrelation auf Formelfolgen übertragen. Es bezeichne Δ eine Formelfolge der Form $A_0, \cdots, A_{n-1}$. Es gelte $m\ \mathbf{r}\ \Delta$, falls m von der Form $<i, m_i>_{\mathbb{N}}$ ist mit $i < n$ und $m_i\ \mathbf{r}\ A_i$.

Lemma 3.5.3. *[Substitution]*
Es seien s und t beliebige Terme.

$$p \mathbf{r} A(t) \text{ und } \mathcal{TM} \vDash t = s \text{ impliziert } p \mathbf{r} A(s) \tag{1}$$

$$p \mathbf{r} A(x) \text{ impliziert } p \mathbf{r} A(t) \tag{2}$$

Beweis. (1) und (2) beweist man durch eine Induktion nach dem Aufbau von A. Zuerst wird (1) bewiesen:
Es sei A sei eine Atomformel:

Fall 1 Es sei $A(t)$ eine Gleichheits-Atomformel mit einem Realisierer p:

Der Realisierer muss aufgrund der Definition von Realisieren gleich 0 sein. Man hat zudem $\mathcal{TM} \vDash A(t)$. Man hat aus der Voraussetzung von (1), dass $\mathcal{TM} \vDash A(s)$ gilt. Weil A(s) eine Gleichheits-Atomformel ist, wird somit $A(s)$ ebenfalls durch 0 realisiert.

Fall 2 Es sei $A(t)$ eine Formel der Form $\hat{t}(t) \in N$ mit Realisierer p:

Siehe Fall 1.

Der Induktionsschritt ist trivial.
(2) beweist man auf die gleiche Weise. Man nützt aus, dass $\mathcal{TM} \vDash A(x) \Rightarrow \mathcal{TM} \vDash A(t)$ gilt.

□

Lemma 3.5.4. *[Beschränkung der Realisierer von $\neg$ und N-freien Formeln]*
Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Konstante $c_n \in \mathbb{N}$ so, dass sich die Realisierer aller $\neg$ und N-freien Formeln mit weniger als n Junktoren durch c_n beschränken lassen.

Beweis. Dies kann man durch eine Induktion nach der Anzahl Junktoren beweisen. $\neg$ und N-freie Formeln ohne Junktoren können ausschliesslich den Realisierer 0 haben. Die Aussage sei nun bewiesen für alle $\neg$ und N-freien Formeln mit weniger als n Junktoren. Es sei A eine Formel mit n Junktoren. Man beweist die Existenz von c_n durch eine Induktion nach der Anzahl Quantoren in A:

- *Verankerung*

  Es sei die Anzahl der Quantoren gleich 0. Es gibt also Formeln A_0 und A_1, so dass $A \equiv A_0 \ j \ A_1$, wobei j ein Junktor ist. Die Realisierer von A entstehen aus einem Realisierer von A_0 und/oder A_1 und 0 oder 1 durch Paaren. Da die Realisierer von A_0 und A_1 durch c_{n-1} beschränkt werden können, findet man somit eine nur von c_{n-1} abhängige Konstante c_n, welche die Realisierer von A beschränkt.

- *Induktionsschritt*

  Es sei die Anzahl der Quantoren in A gleich m. Falls es Formeln A_0 und A_1 gibt, so dass $A \equiv A_0 \ j \ A_1$, wobei j ein Junktor ist, kann man gleich wie in der Verankerung vorgehen. Es gelte also $A \equiv Qx \ B(x)$, wobei Q ein Quantor ist. Es sei t ein beliebiger Term. Die Formel $B(t)$ hat einen Quantor weniger als die Formel $Qx \ B(x)$ und man kann somit die Induktionsvoraussetzung anwenden. Die Schranke c_n, welche man für die Realisierer von $B(t)$

hat, liefert aufgrund der Definition von Realisieren gerade eine Schranke für die Realisierer von $Qx\ B(x)$.

□

3.6 Realisierung der ¬-freien Theoreme von *bon**

Satz 3.6.1. *[Realisierung der ¬-freien Theoreme von bon*]*
Es sei $\Gamma[\vec{x}] \Rightarrow \Delta[\vec{x}]$ eine ¬-freie Sequenz. Es gelte

$$bon^* \vdash \Gamma[\vec{x}] \Rightarrow \Delta[\vec{x}]$$

wobei die Herleitung keine ¬-enthaltenden Formeln enthält. Γ sei von der Form $A_0, \cdots, A_{n-1}$. Dann existiert eine Funktion $f(\vec{z}) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2, so dass für alle Termvektoren $\vec{s}$ gilt:

$$p_0 \ \mathbf{r}\ A_0[\vec{s}] \textit{ und } \cdots \textit{ und } p_{n-1} \ \mathbf{r}\ A_{n-1}[\vec{s}] \ \textit{ impliziert } f(p_0, \cdots, p_{n-1}) \ \mathbf{r}\ \Delta[\vec{s}]$$

Beweis. Dies kann man durch eine Induktion nach der Herleitungslänge beweisen. Man muss zudem verwenden, dass in der Herleitung der gegebenen Sequenz ausschliesslich ¬-freie Sequenzen vorkommen. Diese Annahme erlaubt die beiden Schlussregeln

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta}$$

zu ignorieren, da sie ¬-enthaltende Formeln erschaffen.
Dass die Realisierungsfunktionen, welche für die Axiome oder Theoreme angegeben werden, in der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 sind, ist in fast allen Fällen offensichtlich. Die Grzegorczyk-Bedingung wird deshalb nur in einem einzigen, kritischen Fall erwähnt. Um die freie Variable, welche für eine Schlussregel relevant ist von den anderen freien Variablen der Sequenzen unterscheiden zu können, werden zum Anzeigen von freien Variablen im nachfolgenden Beweis sowohl runde Klammern (für die relevanten freien Variablen) als auch eckige Klammern (für die restlichen freien Variablen) verwendet. Man gebe immer davon aus, dass in Γ n Formeln vorkommen.

Verankerung
Es soll eine Realisierungsfunktion für alle Axiome von *bon** gefunden werden. Man macht eine Fallunterscheidung nach den verschiedenen Typen dieser Axiome:

Fall 1 Es sei vom Typ $\Gamma[\vec{x}], t[\vec{x}] \in N \Rightarrow t[\vec{x}] \in N, \Delta[\vec{x}]$. Man wähle als $f(\vec{z})$ die Funktion

$$<0, z_n>_{\mathbb{N}}$$

Fall 2 Es sei vom Typ $\Gamma[\vec{x}], s[\vec{x}] = t[\vec{x}] \Rightarrow s[\vec{x}] = t[\vec{x}], \Delta[\vec{x}]$. Man wähle als $f(\vec{z})$ die Funktion

$$\lambda z_0, \cdots, z_n.<0, 0>_{\mathbb{N}}$$

Fall 3 Es sei vom Typ $\Gamma[\vec{x}] \Rightarrow t\downarrow, \Delta[\vec{x}]$. Man wähle als $f(\vec{z})$ die Funktion

$$\lambda z_0, \cdots, z_{n-1}.{<}0,0{>}_{\mathbb{N}}$$

Fall 4 Für die Gleichheitsaxiome der Typen E1 bis E3 und E5 hat man ebenfalls mit der Funktion $\lambda z_0, \cdots, z_k.{<}0,0{>}_{\mathbb{N}}$ Erfolg (bei anzupassendem k). Für E4 verwende man ${<}0, \pi_n(\vec{z}){>}_{\mathbb{N}}$. Diese Funktion funktioniert wegen Lemma 3.5.3.

Fall 5 Das Axiom sei von einem der folgenden Typen:

(1) $\Gamma \Rightarrow kt_0t_1 = t_0, \Delta$

(2) $\Gamma \Rightarrow st_0t_1t_2 = (t_0t_2)(t_1t_2), \Delta$

(4a) $\Gamma \Rightarrow p_0{<}t_0, t_1{>} = t_0, \Delta$

(4b) $\Gamma \Rightarrow p_1{<}t_0, t_1{>} = t_1, \Delta$

(5) $\Gamma, t \in N \Rightarrow s_N t \in N, \Delta$

(6a) $\Gamma, t \in N, s_N t = 0 \Rightarrow \Delta$

(6b) $\Gamma, t \in N \Rightarrow p_N(s_N t) = t, \Delta$

(7a) $\Gamma, t \in N \Rightarrow t = 0, p_N t \in N, \Delta$

(7b) $\Gamma, t \in N \Rightarrow t = 0, s_N(p_N t) = t, \Delta$

(8) $\Gamma, t_2 \in N, t_3 \in N, t_2 = t_3 \Rightarrow dt_0t_1t_2t_3 = t_0, \Delta$

(9) $\Gamma, t_2 \in N, t_3 \in N \Rightarrow t_2 = t_3, dt_0t_1t_2t_3 = t_1, \Delta$

Die gesuchte Funktion f für (1) bis (4b) ist die Projektion auf ${<}0,0{>}_{\mathbb{N}}$. Die gesuchte Funktion f für (5) ist ${<}0, z_n + 1{>}_{\mathbb{N}}$ Es gibt keine Realisierer des Antezedens von (6a), da $\mathcal{TM} \nvDash t \in N \wedge s_N t = 0$. Deshalb müssen keine Realisierer für das Konsequens gefunden werden. Man kann für diese Sequenz deshalb eine beliebige Realisierungsfunktion der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 verwenden. Für die Axiome der Typen (6b) und (8) verwendet man ebenfalls Projektionen auf ${<}0,0{>}_{\mathbb{N}}$. Für (7a) projiziert man auf ${<}0,0{>}$ oder auf ${<}1, z_n - 1{>}$ je nach dem, ob $z_n = 0$ gilt. Man erhält deshalb als Realisierungsfunktion:

$$f(\vec{z}) = \begin{cases} {<}0,0{>}_{\mathbb{N}}, & \text{wenn } z_n = 0 \\ {<}1, z_n - 1{>}_{\mathbb{N}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

(Es wäre möglich anstelle von ${<}0,0{>}$ in der oberen Funktion ${<}1,0{>}$ zu verwenden.) Für die Axiome der Typen (7b) und (9) erhält man ebenfalls durch geeignete Fallunterscheidungen die gesuchten Realisierungsfunktionen.

Induktionsschritt
Die These gelte für alle Herleitungen mit einer Tiefe kleiner als k. Die Sequenz $\Gamma[\vec{x}] \Rightarrow \Delta[\vec{x}]$ sei im letzten Schritt hergeleitet worden. In diesem Abschnitt werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

- Γ bezeichnet das Antezedens der neu hergeleiteten Sequenz welches aus m Formeln bestehe.

- Es sei $\vec{p} \in \mathbb{N}^m$. Für alle $i < m$ sei p_i eine Realisierung der i-ten Formel der Formelfolge Γ.
- Die Antezedenzien der Sequenzen aus denen Γ hergeleitet wurde, werden als $\tilde{\Gamma}$ bezeichnet (nötigenfalls mit Indizes).
- Es sei $\tilde{\vec{p}} \in \mathbb{N}^m$. Für alle $i < m$ sei $\tilde{p}_i$ eine Realisierung der i-ten Formel der Formelfolge $\tilde{\Gamma}$.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen lässt sich das Vorgehen zum Finden der gesuchten Funktion allgemein beschreiben: Bei Quantor- oder Junktor-Einführungen auf der rechten Seite ist jede Realisierung der Form $\vec{p}$ auch eine Realisierung der Form $\tilde{\vec{p}}$. Man wendet die durch die Induktion gegebene(n) Funktion(en) f_i deshalb direkt auf $\vec{p}$ an und manipuliert ihre Resultate passend.
Bei Quantor- oder Junktor-Einführung auf der linken Seite manipuliert man die Realisierung der Form $\vec{p}$ so, dass man eine Realisierung (Realisierungen) der Form $\tilde{\vec{p}}$ erhält. Auf diese wendet man dann die durch die Induktionsvoraussetzung gegebene Funktion an. Diese beiden Vorgehensweisen werden nun an den einzelnen Schlussregeln vorgeführt:

Fall 1 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch eine $\wedge$-Einführung auf der rechten Seite an n-ter Stelle entstanden. Es gelten also die folgenden Aussagen:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \equiv \Gamma \Rightarrow \Delta_0, A_0 \wedge A_1, \Delta_1$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma \Rightarrow \Delta_0, A_0, \Delta_1$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma \Rightarrow \Delta_0, A_1, \Delta_1$$

Es sei $\vec{p}$ gegeben. Man hat durch die Induktionsvoraussetzung eine Funktion f_0 mit $f_0(\tilde{\vec{p}})$ $\mathbf{r}$ $\Delta_0, A_0, \Delta_1[\vec{s}]$ und eine Funktion f_1 mit $f_1(\tilde{\vec{p}})$ $\mathbf{r}$ $\Delta_0, A_1, \Delta_1[\vec{s}]$. Weil jede Realisierung der Form $\vec{p}$ eine Realisierung der Form $\tilde{\vec{p}}$ ist, gilt die obige Aussage auch für $\vec{p}$ anstelle von $\tilde{\vec{p}}$. Für die Funktion

$$g(\vec{z}) = \begin{cases} f_0(\vec{z}), & \text{wenn } \pi_0(f_0(\vec{x})) \neq n \\ f_1(\vec{z}), & \text{wenn } \pi_0(f_0(\vec{x})) = n \text{ und } \pi_0(f_1(\vec{x})) \neq n \\ <n, <\pi_1(f_0(\vec{z})), \pi_1(f_1(\vec{z}))>_{\mathbb{N}}>_{\mathbb{N}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

hat man somit $g(\vec{p})$ $\mathbf{r}$ $\Delta_0, A_0 \wedge A_1, \Delta_1[\vec{s}]$.

Fall 2 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch eine $\wedge$-Einführung auf der linken Seite an n-ter Stelle entstanden. Es gelten also die folgenden Aussagen für ein $i < 2$:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \equiv \Gamma_0, A_0 \wedge A_1, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma_0, A_i, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta$$

Man hat durch die Induktionsvoraussetzung eine Funktion $f(\vec{z})$ mit $f(\tilde{\vec{p}})$ $\mathbf{r}$ $\Delta[\vec{s}]$. Aus $\vec{p}$ kann man eine Realisierung $\tilde{\vec{p}}$ gewinnen, indem man in der n-ten Komponente geeignet projiziert. Für die Funktion

$$g(\vec{z}) := f(z_1, \cdots, z_{n-1}, \pi_i(z_n), z_{n+1}, \cdots, z_m)$$

hat man somit $g(\vec{p})$ $\mathbf{r}$ $\Delta[\vec{s}]$.

Fall 3 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch eine $\vee$-Einführung auf der rechten Seite an n-ter Stelle entstanden. Es gelten also die folgenden Aussagen für ein $i < 2$:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \equiv \Gamma \Rightarrow \Delta_0, A_0 \vee A_1, \Delta_1$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma \Rightarrow \Delta_0, A_i, \Delta_1$$

Man hat durch die Induktionsvoraussetzung eine Funktion $f(\vec{z})$, für die $f(\tilde{\vec{p}})$ $\mathbf{r}$ $\Delta_0, A_i, \Delta_1[\vec{s}]$ für ein $i < 2$. Die obige Aussage gilt auch für $\vec{p}$ anstelle von $\tilde{\vec{p}}$. Für die Funktion

$$g(\vec{z}) = \begin{cases} f(\vec{z}), & \text{wenn } \pi_0(f(\vec{x})) \neq n \\ <n, <i, \pi_1(f(\vec{z}))>_{\mathbb{N}}>_{\mathbb{N}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

hat man somit $g(\vec{p})$ $\mathbf{r}$ $\Delta_0, A_0 \vee A_1, \Delta_1[\vec{s}]$.

Fall 4 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch eine $\vee$-Einführung auf der linken Seite an n-ter Stelle entstanden. Es gelten also die folgenden Aussagen:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \equiv \Gamma_0, A_0 \vee A_1, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma_0, A_0, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta \tag{1}$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma_0, A_1, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta \tag{2}$$

Man hat durch die Induktionsvoraussetzung zwei Realisierungsfunktionen: f_1 sei es für die Sequenz (1) und f_2 für die Sequenz (2). Eine Realisierung $\vec{p}$ kann man durch die Projektion π_1 der n-ten Komponente zu einer Realisierung $\tilde{\vec{p}}$ des Antezedens von (1) oder von (2) machen. Falls $\pi_0(p_n) = 0$ so erhält man eine Realisierung von $\Delta[\vec{s}]$ durch

$$f_1(p_0, \cdots, p_{n-1}, \pi_1(p_n), p_{n+1}, \cdots, p_m)$$

Falls $\pi_0(p_n) = 1$ so erhält man eine Realisierung von $\Delta[\vec{s}]$ durch

$$f_2(p_0, \cdots, p_{n-1}, \pi_1(p_n), p_{n+1}, \cdots, p_m)$$

Für die Funktion

$$g(\vec{z}) := \begin{cases} f_1(z_0, \cdots, z_{n-1}, \pi_1(z_n), z_{n+1}, \cdots, z_m), & \text{wenn } \pi_0(z_n) = 0 \\ f_2(z_0, \cdots, z_{n-1}, \pi_1(z_n), z_{n+1}, \cdots, z_m), & \text{sonst} \end{cases}$$

hat man somit $g(\vec{p})$ $\mathbf{r}$ $\Delta[\vec{s}]$.

Fall 5 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch eine $\forall$-Einführung auf der rechten Seite entstanden. Es gelten also die folgenden Aussagen:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \equiv \Gamma \Rightarrow \Delta_0, \forall x\ A(x), \Delta_1 \tag{1}$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma \Rightarrow \Delta_0, A(x), \Delta_1 \tag{2}$$

Man hat durch die Induktionsvoraussetzung eine Funktion $f(\vec{z})$ mit $f(\tilde{\vec{p}})$ **r** $\Delta_0, A(x), \Delta_1[\vec{s}, t]$. Es werde die Variable x o.B.d.A. durch t ersetzt. In Γ kommt die Variable x nicht vor, es gilt daher für jedes $\vec{s}$: $\Gamma[\vec{s}] \equiv \Gamma[\vec{s}, x]$. Die gegebene Realisierung $\vec{p}$ von $\Gamma[\vec{s}]$ ist deshalb auch eine Realisierung von $\Gamma[\vec{s}, x]$ und $f(\vec{p})$ liefert somit eine Realisierung von $\Delta_0, A(x), \Delta_1[\vec{s}, x]$. $f(\vec{p})$ **r** $\Delta_0, \forall x\ A(x), \Delta_1[\vec{s}]$ folgt somit aus der Definition der Realisierung für Allquantoren und daraus, dass x in Δ nicht frei vorkommt.

Fall 6 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch eine $\forall$-Einführung auf der linken Seite entstanden. Es gelten also die folgenden Aussagen:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \equiv \Gamma_0, \forall x\ A(x), \Gamma_1 \Rightarrow \Delta \tag{1}$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma_0, A(t), \Gamma_1 \Rightarrow \Delta \tag{2}$$

Für (2) sei die Realisierungsfunktion f durch die Induktionsvoraussetzung gegeben. Der Realisierer p_n von $\forall x\ A(x)$ realisiert auch $A(x)$. Wegen Lemma 3.5.3 realisiert p_n auch $A(\hat{t})$ für beliebige Terme $\hat{t}$. Es gelte $A(t)[\vec{s}] \equiv A(\hat{t})$. Da p_n **r** $A(\hat{t})$ hat man $\vec{p}$ **r** $\Gamma_0, A(t), \Gamma_1[\vec{s}]$. Somit hat man $f(\vec{p})$ **r** $\Delta[\vec{s}]$. Man kann deshalb als Realisierungsfunktion für (1) ebenfalls f verwenden.

Fall 7 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch eine $\exists$-Einführung auf der rechten Seite entstanden. Es gelten also die folgenden Aussagen:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \equiv \Gamma \Rightarrow \Delta_0, \exists x\ A(x), \Delta_1 \tag{1}$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma \Rightarrow \Delta_0, A(t), \Delta_1 \tag{2}$$

Für (2) sei die Realisierungsfunktion f durch die Induktionsvoraussetzung gegeben. Es gilt $f(\vec{p})$ **r** $\Delta_0, A(t), \Delta_1[\vec{s}]$, da jede Realisierung $\vec{p}$ auch eine Realisierung $\tilde{\vec{p}}$ ist. Es gelte $A(t)[\vec{s}] \equiv A(\hat{t})$. Da eine Realisierung von $A(\hat{t})$ auch eine Realisierung von $\exists x\ A(x)$ ist, hat man $f(\vec{p})$ **r** $\Delta_0, \exists x\ A(x), \Delta_1[\vec{s}]$. Man kann deshalb als Realisierungsfunktion für (1) ebenfalls f verwenden.

Fall 8 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch eine $\exists$-Einführung auf der linken Seite entstanden. Es gelten also die folgenden Aussagen:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \equiv \Gamma_0, \exists x\ A(x), \Gamma_1 \Rightarrow \Delta \tag{1}$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma_0, A(x), \Gamma_1 \Rightarrow \Delta \tag{2}$$

Der in $\vec{p}$ gegebene Realisierer von $\exists x A(x)$ realisiert für einen bestimmten Term t die Formel $A(t)$. Da x sonst nirgendwo in Γ vorkommt realisiert $\vec{p}$ somit $\Gamma[\vec{s}, t]$, wobei die Variable x durch t ersetzt wird. Durch Anwendung der durch die Induktionsvoraussetzung gegebenen Funktion erhält man somit eine Realisierung von $\Delta[\vec{s}, t]$. Da x in Δ nicht vorkommt, hat man eine Realisierung von $\Delta[\vec{s}]$. Die gesuchte Realisierungsfunktion ist also f.

Fall 9 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch positive N-freie Induktion eingeführt worden.

Die neu eingeführte Sequenz sei $\Gamma, t \in N \Rightarrow A(t), \Delta$. Es gelten also die folgenden Aussagen:

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma \Rightarrow A(0), \Delta \tag{1}$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma, x \in N, A(x) \Rightarrow A(s_N x), \Delta \tag{2}$$

Durch die Induktionsvoraussetzung habe man jeweils die Realisierungsfunktion f_i für (i) gegeben. $\vec{z}$ sei der Vektor $[z_0, \cdots, z_{n-1}]$. Die Funktion g, welche die These für diesen Fall erfüllt, kann man durch Rekursion definieren:

$$\begin{aligned} g(\vec{z}, 0) &:= f_1(\vec{z}) \\ g(\vec{z}, n+1) &:= \begin{cases} g(\vec{z}, n), & \text{wenn } \pi_0(g(\vec{z}, n)) \neq 0 \\ f_2(\vec{z}, n, g(\vec{z}, n)), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Dass diese Funktion die Anforderungen erfüllt, kann man durch eine Induktion beweisen. Die Induktion geht über die Zahl, welche die Formel $t[\vec{s}] \in N$ in der Formelfolge $\Gamma, t \in N[\vec{s}]$ realisiert. Im folgenden wird $t[\vec{s}]$ durch $\tilde{t}$ abgekürzt. Es wird jeweils bewiesen, dass die Funktion g den Realisierern von $\Gamma[\vec{s}], \tilde{t} \in N$ einen Realisierer von $A(\tilde{t}), \Delta[\vec{s}]$ zuordnet. Der für Γ gegebene Realisierer wird als $\vec{p}$ bezeichnet.

- *Verankerung*

  Es werde $\tilde{t} \in N$ durch 0 realisiert. Aus der Definition von Realisieren folgt $\mathcal{TM} \vDash \tilde{t} = 0$. Wegen Lemma 3.5.3 hat $A(\tilde{t})$ den gleichen Realisierer wie $A(0)$. Es folgt, dass $f_1(\vec{p})$ einen Realisierer für $A(\tilde{t}), \Delta[\vec{s}]$ liefert.

- *Induktionsschritt*

  Es werde $\tilde{t} \in N$ durch $n+1$ realisiert. Somit wird $p_N\tilde{t} \in N$ durch n realisiert. Die Induktionsvoraussetzung ist auf die Formel $p_N\tilde{t} \in N$ und die Zahl n anwendbar: $\pi_1(g(\vec{p}, n))$ realisiert $B[\vec{s}]$, wobei B eine Formel in Δ ist oder $\pi_1(g(\vec{p}, n))$ realisiert $A(p_N\tilde{t})$. Im ersten Fall erhält man aus den Realisierern von $\Gamma[\vec{s}], \tilde{t} \in N$ den gewünschten Realisierer, indem man vom Realisierer von $\tilde{t} \in N$ eins abzählt, die anderen Realisierer gleich lässt und dann die Funktion g anwendet.

  Im zweiten Fall erhält man den gewünschten Realisierer, indem man vom Realisierer von $\tilde{t}$ eins abzieht und dann auf diese Zahl, die Realisierer von $\Gamma[\vec{s}]$ und den Realisierer $g(\vec{p}, n)$ von $A(p_N\tilde{t})$ die Funktion f_2 anwendet. (Dies funktioniert da die Realisierer von $A(s_N(p_N\tilde{t}))$ auch Realisierer von $A(\tilde{t})$ sind.)

Es ist nicht offensichtlich, dass die für die positive N-freie Induktion angegebene Funktion g in der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 ist, falls dies auf f_1 und f_2 zutrifft. Dies ist aber der Fall:

Die Induktions-Formel A habe höchstens N Junktoren. Aus Lemma 3.5.4 folgt, dass die Realisierer von $A[\vec{x}/\vec{a}]$ für alle Termvektoren $\vec{a}$ kleiner als c_N sind. Hieraus folgt die Beschränkbarkeit von l in der unten angegebenen Abschätzung für g.

$$g(\vec{x}, n) \leq max(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}, k, l) \mid k < n \wedge l < c_N)$$

Die Richtigkeit der Abschätzung lässt sich folgendermassen begründen: Bei fixiertem $\vec{x}$ beweist $g(\vec{x},\cdot)$ bis zu einem bestimmten n_0 eine Formel der Form $A[\vec{x}/\vec{a}]$ und bleibt anschliessend konstant (n_0 kann hier auch unendlich sein). Im nicht-konstanten Bereich von $g(\vec{x},\cdot)$ gilt für jedes $n > 0$: $g(\vec{x},n) = f_2(\vec{x},n-1,l)$, wobei l der Beweis einer Formel der Form $A[\vec{x}/\vec{a}]$ ist. Folglich muss l kleiner als c_N sein. Die Abschätzung stimmt also für diesen Bereich. Im konstanten Bereich stimmt die Abschätzung, weil dort für jedes n $g(\vec{x},n) = g(\vec{x},n_0)$ gilt und sich $g(\vec{x},n_0)$ als Wert der Funktion f_2 oder f_1 angewendet auf geeignete Werte schreiben lässt.

Die oben angegebene Schranke für g ist eine Funktion der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2, falls dies auf f_1 und f_2 zutrifft: Die gebundene Summe für Funktionen der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 ist wiederum in dieser Klasse. Die Funktion

$$h(\vec{x},n) := max(f_2(\vec{x},k,l) \mid k < n \wedge l < c_N)$$

lässt sich durch eine beschränkte Rekursion definieren, wobei $h(\vec{x},n)$ durch die folgende gebundene Summe beschränkt ist:

$$\sum_{\substack{k<n,\\ l<c_N}} f_2(\vec{x},k,l)$$

Somit ist $h(\vec{x},n)$ auch in der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2. Die Funktion

$$(\vec{x},n) \mapsto max(f_1(\vec{x}),h(\vec{x},n))$$

lässt sich als eine Komposition der Funktionen $+$, $\dot{-}$, der Multiplikation, f_1 und h schreiben. Da f_1 und h gemäss Induktionsvoraussetzung in der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 sind und dies auf die restlichen Funktionen auch zutrifft ist somit auch g in dieser Klasse.

Fall 10 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch die Schlussregel Schnitt eingeführt worden. Es gelten also die folgenden Aussagen:

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma, A \Rightarrow \Delta \tag{1}$$

$$bon^* \vdash_0^{k-1} \Gamma \Rightarrow A, \Delta \tag{2}$$

Die Formel A kann wegen der partiellen Schnittelimination als $\neg$-frei angenommen werden. Die Realisierungsfunktionen, welche gemäss Induktionsvoraussetzung existieren heissen f_1 für (1) und f_2 für (2).

Bei gegebenen Realisierern $\vec{p}$ von $\Gamma[\vec{s}]$ geht man folgendermassen vor: Falls $\pi_1(f_2(\vec{p}))$ eine Formel von $\Delta[\vec{s}]$ realisiert, ist man fertig. Falls $\pi_1(f_2(\vec{p}))$ die Formel $A[\vec{s}]$ realisiert, erhält man eine Realisierung von $\Delta[\vec{s}]$, indem man f_1 auf die Realisierer von $\Gamma[\vec{s}]$ und den Realisierer $\pi_1(f_2(\vec{p}))$ von $A[\vec{s}]$ anwendet. Insgesamt liefert also die folgende Funktion das Gewünschte:

$$g(\vec{z}) := \begin{cases} f_2(\vec{z}), & \text{wenn } \pi_0(f_2(\vec{z})) \neq 0 \\ f_1(\vec{z},\pi_1(f_2(\vec{z}))), & \text{sonst} \end{cases}$$

Fall 11 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist durch eine strukturelle Regel eingeführt worden:

Der Beweis der These in diesem Fall bringt mathematisch nichts Neues. Er wird hier weggelassen und stattdessen im Anhang A ausformuliert.

□

3.7 Einschränkung der in $BON^-{+}posIND$ beweisbar totalen Funktionen

Das Ziel dieses Abschnitt ist zu beweisen, dass man in $BON^- + posIND$ höchstens die Totalität primitiv rekursiver Funktionen der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2 beweisen kann. Dies folgt nun ziemlich direkt aus Satz 3.6.1.

Satz 3.7.1. *[Hauptsatz]*
Die Funktion $f : \mathbb{N}^k \to N$ sei in $BON^- + posIND$ beweisbar total (siehe Definition 2.6.1). Dann ist f in der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2.

Beweis. Es gilt wegen der Definition der beweisbaren Totalität für einen Term t_f:

$$BON^- + posIND \vdash x_0 \in N \wedge \cdots x_{k-1} \in N \to t_f x_0 \cdots x_{k-1} \in N$$

Aus der Einbettbarkeit von $BON^- + posIND$ in bon^* (siehe Satz 3.3.5), dem Lemma 3.3.2 und Lemma 3.3.3 folgt:

$$bon^* \vdash x_0 \in N, \cdots, x_{k-1} \in N \Rightarrow t_f x_0 \cdots x_{k-1} \in N$$

Weil Schnitte mit $\neg$-enthaltenden Hauptformeln in bon^* eliminierbar sind, kann man davon ausgehen, dass in der oben genannten Herleitung nur $\neg$-freie Sequenzen vorkommen. Es ist somit Satz 3.6.1 anwendbar. Es sei $\tilde{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ die Realisierungsfunktion der Herleitung. Es gilt für alle $\vec{n} \in \mathbb{N}^k$:

$$n_0 \ \mathbf{r} \ x_0[\vec{s}] \in N, \cdots, n_{k-1} \ \mathbf{r} \ x_{k-1}[\vec{s}] \in N \ \text{ impliziert } \tilde{f}(\vec{n}) \ \mathbf{r} \ t_f x_0 \cdots x_{k-1} \in N[\vec{s}] \qquad (1)$$

Falls man $\vec{s}$ als $[\overline{n_0}, \cdots, \overline{n_{k-1}}]$ wählt, ist der Antezedens von (1) erfüllt und man hat direkt aus der Definition von Realisieren:

$$\mathcal{TM} \models t_f \overline{n_0} \cdots \overline{n_{k-1}} = \overline{\tilde{f}(\vec{n})}$$

Man hat wegen der Definition von beweisbarer Totalität:

$$\mathcal{TM} \models t_f \overline{n_0} \cdots \overline{n_{k-1}} = \overline{f(\vec{n})}$$

Somit sind die Funktionen f und $\tilde{f}$ identisch. f ist deshalb wie $\tilde{f}$ in der Grzegorczyk-Hierarchie-Klasse 2.

□

Kapitel 4

Beweisbar totale Funktionen in BON

In den letzten beiden Kapiteln wurden die Mengen der beweisbar totalen Funktionen der Systeme $BON^{-}+ IND$ und $BON^{-}+ posIND$ eingeschränkt. In diesen Systemen fehlen im Gegensatz zu BON jeweils die Axiome der Typen (10) und (11) für die primitive Rekursion.
In diesem Abschnitt wird bewiesen, dass das Fehlen dieser Axiome für die in Kapitel zwei und drei hergeleiteten Beschränkungsresultate entscheidend ist, weil BON die Totalität *jeder* primitiv rekursiven Funktion beweist.

4.1 Das System $\tilde{BON}$

Definition 4.1.1. $\tilde{BON}$ sei eine Sequenzenkalkül-Formulierung von BON. $\tilde{BON}$ erhält man aus *bon**, indem man die Totalitätsaxiome und die positive N-freie Induktion weglässt und dafür die Rekursoraxiome und die in *bon** weggelassenen D-Axiome ergänzt. Die Rekursoraxiome haben die folgende Form:

$$\text{(r1)}\quad \frac{\Gamma, x_0 \in N \Rightarrow fx_0 \in N, \Delta \text{ und } \Gamma, x_0, x_1, x_2 \in N \Rightarrow gx_0x_1x_2 \in N, \Delta}{\Gamma, t_0 \in N, t_1 \in N \Rightarrow r_N fgt_0t_1 \in N, \Delta}$$

$$\text{(r2)}\quad \frac{\Gamma, x_0 \in N \Rightarrow fx_0 \in N, \Delta \text{ und } \Gamma, x_0, x_1, x_2 \in N \Rightarrow gx_0x_1x_2 \in N, \Delta}{\Gamma, t \in N \Rightarrow r_N fgt0 = ft, \Delta}$$

$$\text{(r3)}\quad \frac{\Gamma, x_0 \in N \Rightarrow fx_0 \in N, \Delta \text{ und } \Gamma, x_0, x_1, x_2 \in N \Rightarrow gx_0x_1x_2 \in N, \Delta}{\Gamma, t_0 \in N, t_1 \in N \Rightarrow r_N fgt_0(s_N t_1) = gt_0t_1(r_N fgt_0t_1), \Delta}$$

Es wird in allen drei Regeln vorausgesetzt, dass die Variablen der Hauptformeln in den Nebenformeln nicht frei vorkommen.
Weil das System $\tilde{BON}$ die genaue Sequenzen-Stil-Entsprechung von BON ist, gilt das folgende Lemma:

Lemma 4.1.2. *Es sei A einmal eine beliebige S.K. Formel und einmal eine Abkürzung für die entsprechende p.T. Formel. Dann gilt:*

$$BON \vdash A \text{ genau dann, wenn } \tilde{BON} \vdash \Gamma \Rightarrow A, \Delta$$

4.2 Beweis der Totalität der primitiv rekursiven Funktionen in BON

Satz 4.2.1. *[λ-Theorem]*
Für jeden Term t und jede Variable x gibt es einen Term (er werde als $\lambda x.t$ bezeichnet) mit den folgenden Eigenschaften:

- *In $\lambda x.t$ kommt x nicht vor.*
- $BON \vdash (\lambda x.t)\downarrow$
- $BON \vdash (\lambda x.t)x \simeq t$
- $BON \vdash a\downarrow \to (\lambda x.t)a \simeq t[a/x]$

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [Jäg96], S. 25.

Satz 4.2.2. *$f : \mathbb{N}^m \to N$ sei eine primitiv rekursive Funktion. Dann ist f in BON beweisbar total. D.h. es gibt einen geschlossenen Term t_f, so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(B1) $\tilde{BON} \vdash x_0 \in N, \cdots, x_{m-1} \in N \Rightarrow t_f x_0 \cdots x_{m-1} \in N$

(B2) $\mathcal{TM} \models t_f \overline{n_0} \cdots \overline{n_{m-1}} = \overline{f(n_0, \cdots, n_{m-1})}$ *für alle Vektoren* $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$.

(Die Bedingungen (B1) und (B2) entsprechen zusammen der beweisbaren Totalität in BON, weil sich BON und $\tilde{BON}$ entsprechen.)

Beweis. Diesen Satz kann man induktiv über die Funktionen-Algebra-Charakterisierung der primitiv rekursiven Funktionen führen, welche in der Definition 1.3 auf Seite 3 angegeben ist.

Verankerung

Fall 1 Es sei f die Funktion S

Man wähle als t_f den Term s_N. (B1) und (B2) gelten dann trivialerweise.

Fall 2 Es sei f die Funktion C^k_m.

Man wähle als t_f den Term $\lambda x_0 \cdots x_{k-1}.\overline{m}$. Aus dem λ-Theorem folgt:

$$\tilde{BON} \vdash t_f x_0 \cdots x_{k-1} = \overline{m} \tag{1}$$

$\tilde{BON}$ kann zudem für alle Nachfolger von 0 und somit auch für $\overline{m}$ beweisen, dass diese in N sind. (Siehe Axiomtyp (5b) für BON^* auf der Seite 34.) Somit ist Bedingung (B1) erfüllt. (B2) ist zudem offensichtlich erfüllt.

Fall 3 sei f die Funktion π^k_i.

Siehe Fall 2.

Induktionsschritt

Fall 1 Komposition

Es soll der Satz für die Komposition einer p-stelligen Funktion g und p k-stelligen Funktionen h_i bewiesen werden. Man hat durch die Induktionsvoraussetzung geschlossene Terme t_g und t_{h_i} für alle $i < p$ mit:

$$B\tilde{O}N \vdash x_0 \in N, \cdots, x_{p-1} \in N \Rightarrow t_g x_0 \cdots x_{p-1} \in N \tag{1}$$

$$B\tilde{O}N \vdash x_0 \in N, \cdots, x_{k-1} \in N \Rightarrow t_{h_i} x_0 \cdots x_{k-1} \in N \tag{2i}$$

Man erhält durch Einsetzen aus (1):

$$\begin{aligned} B\tilde{O}N \vdash t_{h_0} x_0, \cdots, x_{k-1} \in N, \cdots, t_{h_{p-1}} x_0 \cdots x_{k-1} \in N \Rightarrow \\ t_g(t_{h_0} x_0 \cdots x_{n-1}) \cdots (t_{h_{p-1}} x_0 \cdots x_{k-1}) \in N \end{aligned} \tag{3}$$

(3) schneidet man sukzessive für jedes i mit $(2i)$ und erhält schliesslich:

$$B\tilde{O}N \vdash x_0 \in N, \cdots, x_{k-1} \in N \Rightarrow t_g(t_{h_0} x_0 \cdots x_{k-1}) \cdots (t_{h_{p-1}} x_0 \cdots x_{k-1}) \in N \tag{4}$$

Durch die Anwendung des λ-Theorems erhält man einen geschlossenen Term t_{gh} für den gilt:

$$B\tilde{O}N \vdash t_{gh} x_0 \cdots x_{k-1} = t_g(t_{h_0} x_0 \cdots x_{k-1}) \cdots (t_{h_{p-1}} x_0 \cdots x_{k-1})$$

Der Term t_{gh} ist der gesuchte Term. (B1) erfüllt er aufgrund von (4) und dem λ-Theorem. (B2) ist wegen der Induktionsvoraussetzung erfüllt.

Fall 2 Rekursion

Es soll der Satz für die Funktion $h : N^{k+2} \to N$ bewiesen werden, welche durch Rekursion aus den Funktionen $g : N^{k+3} \to N$ und $f : N^{k+1} \to N$ entsteht. Man hat durch die Induktionsvoraussetzung geschlossene Terme t_g und t_f mit:

$$B\tilde{O}N \vdash x_0 \in N, \cdots, x_{k+2} \in N \Rightarrow t_g x_0 \cdots x_{k+2} \in N \tag{1}$$

$$B\tilde{O}N \vdash x_0 \in N, \cdots, x_k \in N \Rightarrow t_f x_0 \cdots x_k \in N \tag{2}$$

Auf (1) und (2) wendet man nun die Schlussregel (r1) an:

- Als Γ wählt man $x_0 \in N, \cdots, x_{k-1} \in N$.
- Als x_i wählt man x_{k+i} für alle $i < 3$.
- Als g wählt man $t_g x_0 \cdots x_{k-1}$, als f wählt man $t_f x_0 \cdots x_{k-1}$.
- Es kommt kein Δ vor.
- Als t_0 wählt man die Variable x_k und als t_1 wählt man eine Variable x_{k+1}.

Man erhält:

$$\tilde{BON} \vdash x_0 \in N, \cdots, x_{k+1} \in N \Rightarrow r_N(t_f x_0 \cdots x_{k-1})(t_g x_0 \cdots x_{k-1}) x_k x_{k+1} \in N \tag{3}$$

Durch die Anwendung des λ-Theorems erhält man einen geschlossenen Term t für den gilt:

$$\tilde{BON} \vdash t x_0 \cdots x_{k+1} = r_N(t_f x_0 \cdots x_{k-1})(t_g x_0 \cdots x_{k-1}) x_k x_{k+1} \tag{4}$$

t ist der gesuchte Term. Die Bedingung (B1) erfüllt er aufgrund von (3) und dem λ-Theorem. Durch Anwendung der Schlussregeln (r2) und (r3) kann man zeigen, dass t auch (B2) erfüllt:

Auf (1) und (2) wendet man die Schlussregel (r2) an und erhält durch analoge Festlegung von Γ, Δ, f, g, x_i und t wie oben:

$$\begin{aligned} \tilde{BON} \vdash \quad & x_0 \in N, \cdots, x_{k-1} \in N, x \in N \Rightarrow \\ r_N(t_f x_0 \cdots x_{k-1})(t_g x_0 \cdots x_{k-1}) x 0 &= t_f x_0 \cdots x_{k-1} x \end{aligned} \tag{5}$$

Aus (5), der Induktionsvoraussetzung auf t_f angewendet und der Definition von t folgt für alle Zahlenvektoren $\vec{n} \in \mathbb{N}^{k+1}$:

$$\mathcal{TM} \models t\overline{n_0} \cdots \overline{n_k} 0 = \overline{f(n_0, \cdots, n_k)} \tag{6}$$

Somit gilt aufgrund der Definition von h:

$$\mathcal{TM} \models t\overline{n_0} \cdots \overline{n_k} 0 = \overline{h(n_0, \cdots, n_k, 0)} \tag{7}$$

Durch die Anwendung der Regel (r3) auf (1) und (2) und Verwendung der Definition von t folgt für alle Zahlenvektoren $\vec{n} \in N^{k+2}$ mit $n_{k+1}>0$:

$$\mathcal{TM} \models t\overline{n_0} \cdots \overline{n_k n_{k+1}} = t_g \overline{n_0} \cdots \overline{n_k n_{k+1}} (t\overline{n_0} \cdots \overline{n_k} \overline{n_{k+1} - 1}) \tag{8}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung auf t_g angewendet, (7) und (8) und der rekursiven Definition von h folgt (B2).

□

Der soeben bewiesene Satz zeigt, dass die Axiome (10) und (11) wesentlich zur Beweisstärke von BON beitragen und nicht durch eine auf N-freie Formeln eingeschränkte Induktion kompensiert werden können. (Sie können hingegen durch Zulassen von Induktion über beliebige p.T. Formeln in einer gewissen Weise ersetzt werden, wie in [Jäg96] auf S. 23 beschrieben wird.)
Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt direkt, dass es unmöglich ist die Konsequenzen $\neg$-freier Theoreme der Theorie $\tilde{BON}$ wie in Satz 3.6.1 mittels einer primitiv rekursiven Funktion zu realisieren.
Aus diesem Satz folgt zudem, dass auch die asymmetrische Interpretation des N-Prädikats in BON mittels einer primitiv rekursiven Funktion nicht funktionieren kann.

Anhang A

Ergänzung des Beweises von Satz 3.6.1

Die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ sei im letzten Schritt durch eine strukturelle Regel hergeleitet worden. Die strukturellen Regeln sind Weakening, Vertauschung von Formeln und Kürzung von gleichen Formeln.

- Weakening auf der rechten Seite:

  Die Realisierungsfunktion der ursprünglichen Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ hat die Form $<f(\vec{z}), g(\vec{z})>_{\mathbb{N}}$. Die neue Formel werde an der n-ten Stelle in Δ eingefügt. Die neue Realisierungsfunktion h kann man folgendermassen definieren:

$$h(\vec{z}) := \begin{cases} <f(\vec{z}), g(\vec{z})>_{\mathbb{N}}, & \text{wenn } f(\vec{z}) < n \\ <f(\vec{z}), g(\vec{z}) + 1>_{\mathbb{N}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Weakening auf der linken Seite:

  Die neue Formel $A(\vec{x})$ sei an der n-ten Stelle von Γ eingefügt worden und Γ enthalte m Formeln. Die neue Realisierungsfunktion kann man folgendermassen definieren:

$$h(\vec{z}) := f(z_0, \cdots, z_{n-1}, z_{n+1}, \cdots, z_m)$$

- Vertauschung von Formeln auf der rechten Seite:

  Die Realisierungsfunktion der ursprünglichen Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ hat die Form $<f(\vec{x}), g(\vec{x})>_{\mathbb{N}}$. Es soll die Formel an der n-ten Stelle von Δ mit der Formel an der m-ten Stelle von Δ vertauscht werden. Die neue Realisierungsfunktion kann man folgendermassen definieren:

$$g(\vec{z}) := \begin{cases} <n, g(\vec{z})>_{\mathbb{N}}, & \text{wenn } f(\vec{z}) = m \\ <m, g(\vec{z})>_{\mathbb{N}}, & \text{wenn } f(\vec{z}) = n \\ <f(\vec{z}), g(\vec{z})>_{\mathbb{N}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Vertauschung von Formeln auf der linken Seite:

  Es soll die Formel an der n-ten Stelle von Γ mit der Formel an der m-ten Stelle von Γ vertauscht werden. Es sei $n < m$ und Γ enthalte M Formeln Die neue Realisierungsfunktion kann man folgendermassen definieren:

$$h(\vec{z}) := f(z_0, \cdots, z_{n-1}, z_m, z_{n+1}, \cdots, z_{m-1}, z_n, z_{m+1}, \cdots, z_M)$$

- Streichung einer Formel auf der rechten Seite:

  Der Realisierer der ursprünglichen Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ hat die Form $<f(\vec{x}), g(\vec{x})>_{\mathbb{N}}$. Es soll die Formel an der m-ten Stelle von Δ auch an der n-ten Stelle von Δ vorhanden sein. Die Formel an der m-ten Stelle soll weggelassen werden. Die neue Realisierungsfunktion kann man folgendermassen definieren:

$$h(\vec{z}) := \begin{cases} <n, g(\vec{z})>_{\mathbb{N}}, & \text{wenn } f(\vec{z}) = m \\ <f(\vec{z}), g(\vec{z})>_{\mathbb{N}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Streichung einer Formel auf der linken Seite:

  Es soll die Formel an der m-ten Stelle von Γ auch an der n-ten Stelle von Γ vorkommen. Die Formel an der m-ten Stelle soll gestrichen werden. Es sei $n < m$ und Γ enthalte M Formeln Die neue Realisierungsfunktion kann man folgendermassen definieren:

$$h(\vec{z}) := f(z_0, \cdots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, \cdots, z_{m-1}, z_n, z_{m+1}, \cdots, z_M)$$

Anhang B

Legende einiger Bezeichnungen und Symbole

Bezeichnung	**Kurzbeschrieb**	**Definition**
t_0, t_1	Bezeichnungen für Terme. Weitere Bezeichnungen für Terme sind a, b, c, s und t (alle können auch indexiert vorkommen).	Seite 1
p.T. Formel	Eine partielle-Terme-Formel. Sie entsteht aus Formeln der Form $t_0 = t_1$, $N(t)$ oder $t\downarrow$ durch Negierung, Verknüpfung mit $\vee$ oder Quantifizierung mit $\exists$.	Seite 5
T.K. Formel	Eine Tait-Kalkül-Formel. Sie entsteht aus Formeln der Form $t_0 = t_1$, $N(t)$ oder $t\downarrow$ und deren Negationen durch Verknüpfung mit $\wedge$ oder $\vee$ oder Quantifizierung mit $\forall$ oder $\exists$.	Seite 12
S.K. Formel	Eine Sequenzenkalkül-Formel. Sie entsteht aus Formeln der Form $t_0 = t_1$, $N(t)$ oder $t\downarrow$ durch Negierung, Verknüpfung mit $\wedge$ oder $\vee$ oder Quantifizierung mit $\forall$ oder $\exists$.	Seite 33
$t_0 \neq t_1$	Je nach Kontext eine Abkürzung für die p.T. Formel, welche durch $t_0\downarrow \wedge t_1\downarrow \wedge \neg t_0 = t_1$ abgekürzt wird oder eine Abkürzung für die T.K. Formel $\neg t_0 = t_1$.	Seite 5 Seite 13
$\tilde{\Gamma}$	Dies ist die disjunktive Verbindung aller Formeln, welche in der Formelmenge Γ vorkommen.	Seite 21
A^n_m	Eine Modifikation der Formel A, welche durch die asymmetrische Interpretation positiver und negativer Vorkommnisse von N in A entsteht.	Seite 22
$\approx$	Eine Äquivalenzrelation auf Termen auf der das Termmodell basiert. Sie wird als symmetrischer Abschluss einer Reduktionsrelation gewonnen.	Seite 8

Bezeichnung	**Kurzbeschrieb**	**Definition**
$<$	Je nach Kontext eine Bezeichnung für die Kleiner-Relation auf den natürlichen Zahlen oder für eine entsprechende Relation auf Termen, welche sich auf einen Nachfolger von 0 reduzieren lassen.	Seite 10
$\mathbf{r}$	Die Bezeichnung für die Realisierungsrelation.	Seite 37
BON	Eine applikative Theorie formuliert in der Logik der partiellen Terme. Sie umfasst eine Axiomatisierung von partiellen kombinatorischen Algebren, Paarbildung und Projektionen sowie einige Grundeigenschaften natürlicher Zahlen.	Seite 4
$BON^- + IND$	Eine Modifikation von BON. Es fehlen die Rekursoraxiome, dafür werden Axiome für die Induktion über N-freie Formeln ergänzt.	Seite 7
$BON^- + posIND$	Eine Modifikation von BON. $BON^- + posIND$ ist etwas schwächer als $BON^- + IND$. Es fehlen ebenfalls die Rekursoraxiome, dafür werden Axiome für die Induktion über N- und $\neg$-freie Formeln ergänzt.	Seite 7
BON^*	Eine als Tait-Kalkül formulierte Theorie, in welche $BON^- + IND$ eingebettet werden kann. In BON^* ist die Definiertheit jedes Terms als Axiom vorhanden.	Seite 12
BON^{**}	Eine als Tait-Kalkül formulierte Theorie, in welche $BON^- + IND$ eingebettet werden kann. BON^{**} ist etwas schwächer als BON^*. In BON^{**} kann nicht die Definiertheit aller Terme bewiesen werden.	Seite 28
bon^*	Eine als Sequenzenkalkül formulierte Theorie, in welche $BON^- + posIND$ eingebettet werden kann. In bon^* ist die Definiertheit jedes Terms als Axiom vorhanden.	Seite 32
$B\tilde{O}N$	Eine als Sequenzenkalkül formulierte Theorie, welche äquivalent zu BON ist.	Seite 47
$\mathcal{TM}$	Ein Modell (Termmodell) von BON und $BON^- + IND$. Sein Universum besteht aus Äquivalenzklassen geschlossener Terme.	Seite 9
$\mathcal{RFM}$	Ein Modell (Modell der rekursiven Funktionen) von BON und $BON^- + IND$. Sein Universum besteht aus rekursiven Funktionen.	[Jäg96], S.24

Literaturverzeichnis

[Can95] Cantini, Andrea: *Proof-theoretic aspects of self-referential truth.* Tenth International Congress of Logic, Methodology and Philosophie of Science, Florence, 1:7–27, 1995.

[Jäg96] Jäger, Gerhard: *Applikative Theorien und explizite Mathematik*, 1996.

[Sel07] Selinger, Peter: *Lecture notes on the lambda calculus*, 2007.

[Str03] Strahm, Thomas: *Theories with self-application and computational complexity.* Information and Computation, 185(2):263–297, 2003.